

Leandro Alberto Percebon

## **CÁLCULO DE PARÂMETROS ELÉTRICOS SÉRIE DE CABOS UMBILICAIS**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauricio Valencia  
Ferreira Da Luz, Dr.

Coorientador: Prof. Renato Carlson,  
Dr.

Florianópolis  
2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Percebon, Leandro Alberto

Cálculo de parâmetros elétricos série de cabos  
umbilicais / Leandro Alberto Percebon ; orientador,  
Maurício V. Ferreira da Luz ; co-orientador, Renato  
Carlson. - Florianópolis, SC, 2013.

104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Impedância. 3. Cabos  
umbilicais. 4. Elementos finitos. I. Ferreira da Luz,  
Maurício V.. II. Carlson, Renato. III. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. IV. Título.

Leandro Alberto Percebon

## **CÁLCULO DE PARÂMETROS ELÉTRICOS SÉRIE DE CABOS UMBILICAIS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Eletromagnetismo e Dispositivos Eletromagnéticos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Mauricio V. Ferreira da Luz, Dr.  
Orientador

---

Prof. Renato Carlson, Dr.  
Co-orientador

---

Prof. Patrick Kuo Peng, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Eng. Elétrica

### **Banca Examinadora:**

---

Prof. Mauricio V. Ferreira da Luz, Dr.  
Presidente

---

Prof. Renato Carlson, Dr.

---

Prof. Orlando José Antunes, Dr.

---

Prof. Jean Vianeí Leite, Dr.

---

Prof. Walter Carpes Júnior, Dr.



À minha família.



## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida, saúde e força de vontade.

A meus pais, Luiz Carlos e Claudete, por terem sido meus maiores e eternos professores, me guiando ao longo de toda minha vida. Agradeço pela paciência, honestidade, e principalmente por terem fé nas minhas escolhas e por investirem tanto na minha educação e formação. Sem sua ajuda não teria sido possível concretizar este estudo.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Maurício Valência Ferreira da Luz, pela oportunidade de me direcionar neste trabalho, oferecendo toda sua experiência e técnica, além da amizade e do sorriso sempre presente.

A minha companheira Luciana Buss pela paciência e amizade durante toda a jornada.

Aos colegas de empresa, Mateus Bonadiman, Dr. Wilson Valente, Diogo Figueiredo, Mauricio França e Fabiano Diesel.

Ao colega e amigo de estudos Angelo Hafner, pelas horas de discussões e troca de informações.

A empresa Engineering Simulation and Scientific Software e a todos os seus colaboradores que de alguma forma contribuíram para aliar os conhecimentos teóricos e práticos, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

A todas as pessoas que de alguma forma ajudaram na conclusão deste estudo. Obrigado.





*“Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele.  
Por isso o universo de cada um se resume ao tamanho do seu saber.”*  
Albert Einstein

*“If I were again beginning my studies,  
I would follow Plato and start  
with mathematics.”*  
Galileo Galilei



## RESUMO

Os cabos umbilicais são uma parte importante do sistema de transmissão de energia subaquático. A problemática encontrada no cálculo de parâmetros elétricos de cabos umbilicais, tais como a resistência e indutância série são abordadas com metodologias analíticas e numéricas. Primeiramente é apresentada uma sequência de formulações que permitem analisar cabos mais simples através de equações desenvolvidas para cabos unipolares, nas quais são excluídos os efeitos pelicular e de proximidade. O método dos elementos finitos é introduzido para englobar todos os efeitos dependentes da frequência e a especificidade geométrica apresentada pelos cabos umbilicais. Ao final é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos com a metodologia analítica e com a numérica. Um segundo caso comparando os resultados numéricos e medidos para um cabo trifásico é também abordado.

**Palavras-chave:** Impedância. Cabos umbilicais. Elementos finitos.



## **ABSTRACT**

Power umbilicals play an important role on any subsea power system. The problems encountered in the calculation of umbilical's electrical parameters, such as series resistance and inductance are discussed with numerical and analytical methodologies. Firstly, a mathematical approach is showed that allows the analysis of simpler single core power cables, where skin and proximity effects are neglected. The finite element method is then introduced to include these effects as well as other frequency dependencies and also allow to model the special needs required in complex geometries founded in power umbilicals. Finally, a comparison between calculated results from analytical and finite element simulation is presented for a single core coaxial cable. A second case, where a three phase power cable is analyzed, is also presented to compare finite element results and measurements.

**Keywords:** Impedance. Power Umbilical. Finite Element Method.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de cabo umbilical .....	2
Figura 2 - Cabo Umbilical Trifásico com condutores de comunicação. ....	8
Figura 3 - Formas usadas para os condutores elétricos. ....	10
Figura 4 - Linhas equipotenciais do condutor. ....	11
Figura 5 - Exemplos de malha de elementos finitos para MDF(a) e MEF(b). ..	17
Figura 6 - Corte transversal de um cabo SC, constituído por núcleo (C), isolamento interno (I), intermediário (B) e externo (P), bainha metálica (S) e armadura (A). ....	20
Figura 7 - Circuito equivalente de impedâncias para um cabo tipo SC. ....	22
Figura 8 - Circuito equivalente de admitâncias para um cabo tipo SC. ....	30
Figura 9 - Circuito equivalente de um sistema resistivo/indutivo. ....	43
Figura 10 - Fluxograma do processo de solução. ....	49
Figura 11 - Interface com usuário do software ANSYS Maxwell. ....	49
Figura 12 - Etapa de pós-processamento, visualização de campo elétrico. ....	51
Figura 13 - Cabo coaxial utilizado como exemplo para cálculo. ....	54
Figura 14 - Ambiente para definição da matriz de impedância. ....	57
Figura 15 – Zoom da malha final para o cabo coaxial. ....	58
Figura 16 – Cartas de campo magnético para o cabo coaxial nas frequências (a) 10 Hz, (b) 1000 Hz, (c) 10 kHz e (d) 100 kHz. ....	59
Figura 17 - Comparação entre resultados para resistência em Ohms/metro. ....	60
Figura 18 - Comparação entre resultados de indutância em mH/metro. ....	60
Figura 19 - Diferença percentual entre valores calculados. ....	61
Figura 20 - IPU usado na reserva de Snøhvit. ....	62
Figura 21 - Trifólio de potência do IPU de Snøhvit. ....	63
Figura 22 - Comparação de resultados para a resistência do trifólio de potência e do umbilical de Snøhvit. ....	65
Figura 23 - Comparação de resultados para a resistência do trifólio de potência e do umbilical de Snøhvit. ....	66
Figura 24 - Geometria do IPU de Snøhvit. ....	66
Figura 25 – Zoom da malha de elementos finitos para o IPU de Snøhvit. ....	67
Figura 26 - Linhas de fluxo magnético. ....	68
Figura 27 - Resultados para o trifólio de potência. ....	69
Figura 28- Resultados para o IPU de Snøhvit. ....	69





## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Comparação entre os principais tipos de isolamento sólidos. ....	13
Tabela 2 – Resultados analíticos de resistência e indutância para o cabo coaxial. .....	55
Tabela 3 - Resultado de resistência e indutância para o cabo coaxial. ....	59
Tabela 4 - Propriedades dimensionais do IPU de Snøhvit. ....	63
Tabela 5 - Comparação de resultados medidos e simulados. ....	64



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

IPU – Cabo Umbilical Integrado (do inglês: Integrated Production Umbilical)  
BCS – Bomba centrífuga submersa  
ESSS – Engineering Simulation and Scientific Software  
MEF – Método dos Elementos Finitos  
MDF – Método das Diferenças Finitas  
BEM – Método dos Elementos de Contorno  
EMTP – Electromagnetic Transients Program  
PVC – Cloreto de polivinila  
PET – Polietileno  
LDPE – Polietileno de baixa densidade  
HDPE – Polietileno de alta densidade  
XLPE – Polietileno reticulado  
EPR – Etileno propileno  
SC – Cabo coaxial de núcleo simples (do inglês: Single Core)  
PT – Cabo tipo Pipe-Type  
RMS – Valor eficaz (do inglês: root mean square)  
CC – Corrente contínua



## LISTA DE SÍMBOLOS

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>
$\mathbf{A}$	Potencial vetor magnético
$a_n$	Coefficiente desconhecido para a função $\varphi_n$
$A_n$	Valor de $\mathbf{A}$ no nó global $n$
$\mathbf{B}$	Densidade de campo magnético
$[\mathbf{C}]$	Matrix de capacitância shunt
$\mathbf{E}$	Campo elétrico
$\mathbf{E}_s$	Campo elétrico fonte
$[\mathbf{F}]$	Matriz de coeficientes integrais relacionados às incógnitas nodais
$[\mathbf{G}]$	Matrix de condutância shunt
$g_0(x, y)$	Função de contorno de Dirichlet
$[\mathbf{G}]$	Matrix de condutância
$[\mathbf{G}_c]$	Matriz diagonal de condutividades
$\mathbf{H}$	Campo magnético
$i$	Índice
$\mathbf{I}$	Corrente fasorial
$I_0(), I_1()$	Função modificada de Bessel de primeira espécie, de ordem zero e ordem um
$j$	Indicador de numero complexo ou índice
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente total
$\mathbf{J}_s$	Fonte de densidade de corrente
$k$	Índice
$K$	Número de condutores
$K_0(), K_1()$	Função modificada de Bessel de primeira espécie, de ordem zero e ordem um
$[\mathbf{L}]$	Matriz de indutância série
$M$	Número de elementos na malha usada no MEF
$m$	Índice
$N$	Número de nós incógnitos na malha de elementos finitos
$N_B$	Número de nós usados na fronteira de Dirichlet
$N_T$	Número total de nós na malha

---

$P$	Potência ativa média
$Q$	Potência reativa média
$[R]$	Matriz de resistência série
$S$	Potência aparente média
$S_C$	Área de um condutor
$S_R$	Domínio de cálculo
$S_{E_i}$	Área de um condutor
$[T]$	Matriz de coeficientes
$T_{mn}$	Elementos de $[T]$
$[U]$	Matriz de coeficientes
$U_{mn}$	Elementos de $[U]$
$\mathbf{u}_z$	Vetor unitário na direção do eixo z
$[V]$	Vetor de tensões elétrica
$W_m$	Energia magnética média
$[Y]$	Matriz de admitância shunt
$[Z]$	Matriz de impedância série
$\varepsilon$	Permissividade elétrica
$\varepsilon_0$	Permissividade elétrica do vácuo
$\varepsilon_r$	Permissividade elétrica relativa
$\psi_o$	Função que define a condição de contorno de Dirichlet
$\mu$	Permeabilidade magnética
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo
$\mu_r$	Permeabilidade magnética relativa
$\sigma$	Condutividade elétrica
$\phi$	Potencial escalar elétrico
$\omega$	Frequência angular
$\Gamma$	Contorno do domínio de cálculo $S_R$
$\Gamma_0$	Condição de contorno de Dirichlet
$\Gamma_1$	Condição de contorno de Neumann

---

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS.....	3
1.2	MOTIVAÇÃO .....	4
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>7</b>
2.1	CABOS UMBILICAIS .....	7
2.1.1	<i>Características Construtivas.....</i>	<i>7</i>
2.1.1.1	<i>Condutores.....</i>	<i>9</i>
2.1.1.2	<i>Blindagem ou Bainha .....</i>	<i>11</i>
2.1.1.3	<i>Isolação .....</i>	<i>12</i>
2.1.1.4	<i>Enchimentos.....</i>	<i>14</i>
2.1.1.5	<i>Armadura.....</i>	<i>14</i>
2.2	MÉTODOS ANALÍTICOS PARA CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS.....	14
2.3	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS.....	15
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA DE CÁLCULO DE PARÂMETROS .....</b>	<b>19</b>
3.1	METODOLOGIA ANALÍTICA .....	19
3.1.1	<i>Metodologia aplicada no cálculo de parâmetros série em sistemas de cabos tipo SC.....</i>	<i>22</i>
3.1.2	<i>Metodologia aplicada no cálculo de parâmetros transversais em sistemas de cabos tipo SC.....</i>	<i>29</i>
3.2	METODOLOGIA NUMÉRICA .....	31
3.2.1	<i>Principais equações para o cálculo da matriz Z.....</i>	<i>32</i>
3.2.2	<i>Solução de equações diferenciais com o método de Galerkin .....</i>	<i>36</i>
3.2.3	<i>O MEF baseado no método de Galerkin .....</i>	<i>38</i>
3.2.4	<i>Cálculo da matriz de impedância (Z) a partir da solução numérica de campos .....</i>	<i>42</i>
3.2.5	<i>O método de perdas-energia para o cálculo de (Z).....</i>	<i>42</i>
3.3	O SOFTWARE ANSYS MAXWELL .....	46
<b>4</b>	<b>ANÁLISE E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
4.1	CABO COAXIAL .....	53
4.1.1	<i>Metodologia analítica.....</i>	<i>54</i>
4.1.2	<i>Metodologia numérica.....</i>	<i>55</i>
4.1.3	<i>Comparação de resultados para o cabo coaxial.....</i>	<i>59</i>
4.2	UMBILICAL DE CONTROLE DE SNØHVIT .....	61
4.2.1	<i>Modelagem do trifólio de potência.....</i>	<i>62</i>
4.2.2	<i>Modelagem do IPU de Snøhvít.....</i>	<i>64</i>

<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>71</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO EM MATLAB PARA CÁLCULO DE CABOS</b>	
<b>SC.....</b>		<b>79</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O petróleo, do latim *petroleum*, "óleo da pedra", no sentido de óleo bruto, consiste em uma substância oleosa e inflamável, de coloração geralmente negra e menos densa que a água. Dentre as diversas teorias a respeito de seu surgimento, a mais aceita confere suas origens aos restos orgânicos de animais e vegetais, os quais, depositados no fundo de lagos e mares ao longo de milhares de anos, sofreram transformações químicas, devido às elevadas taxas de pressão e temperatura.

Registros históricos apontam como marco inicial de sua utilização a exploração de afloramentos no Oriente Médio (por volta de 1000 a.C.) e, posteriormente, perfurações feitas com hastes de bambu na China. Ao longo de muitos anos, as principais utilidades do petróleo consistiram na iluminação e no aquecimento de água (Johnson, 1938).

A moderna indústria petrolífera, por sua vez, desenvolveu-se a partir de meados do século XIX, quando poços de pequena profundidade começaram a ser perfurados ao redor do mundo. O primeiro poço comercial com elevada produção foi perfurado nos Estados Unidos, no estado da Pensilvânia, por Edwin Laurentine Drake, também conhecido por Coronel Drake, por meio de uma técnica elaborada para a exploração de minas de sal, em 1859.

A descoberta de suas inúmeras vantagens e a crescente demanda pelo petróleo e seus derivados, requerem aumento da produção e melhoria da eficiência no transporte do material extraído. A indústria petrolífera contribuiu para a elaboração e aprimoramento de técnicas de soldagem, de laminação de tubos, de metalurgia, as quais possibilitaram a construção de longas redes de tubulação. Com a intensificação e melhoria dos diversos processos envolvidos, óleo de melhor qualidade pôde chegar aos consumidores finais, e a partir de então, a humanidade pôde observar um desenvolvimento industrial sem precedentes (International Energy Agency).

Diante da escassez de jazidas tradicionais, geralmente encontradas em terra e a poucos metros de profundidade, foi necessário procurar bacias sedimentares de difícil acesso, tais como as localizadas em zonas árticas e marítimas. Atualmente, a indústria do petróleo atua nas mais diversas regiões do planeta, principalmente em plataformas oceânicas. Para tanto, investimentos expressivos são feitos com o intuito de aprimorar as técnicas de extração, transporte e refino do petróleo.

As plataformas oceânicas de extração de petróleo, também chamadas de plataformas *Offshore*, constituem estruturas, fixas ou

móveis, geralmente pavimentadas em concreto, flutuantes com ancoragem ou braços tensores, podendo ainda, se tratar de plataformas distribuidoras. Independentemente do tipo de plataforma, o processo de extração de petróleo em meio oceânico muitas vezes demanda que sejam instalados equipamentos elétricos no leito marinho, como bombas e sensores, fazendo-se necessário que a potência elétrica seja entregue nestes ambientes. A partir dessa necessidade, surgiram os cabos umbilicais, também conhecidos como IPU, do inglês *Integrated Production Umbilical*, que são cabos extensos, muitas vezes com comprimento de dezenas de quilômetros, usados para conectar eletricamente as plataformas oceânicas aos equipamentos submarinos.

Um exemplo típico de cabo umbilical é o cabo mostrado na Figura 1, com condutores de potência, condutores de sinal ou controle, e dutos hidráulicos para acionamento de válvulas ativadas por pressão hidráulica. Os condutores de potência são geralmente trifásicos e normalmente utilizados para o acionamento das bombas centrífugas submersas (BCS). Os condutores de sinal são responsáveis pela troca de dados entre a plataforma e os diversos sensores e dispositivos de aquisição de dados existentes no leito marinho, tais como sensores de pressão, vazão, temperatura, entre outros.

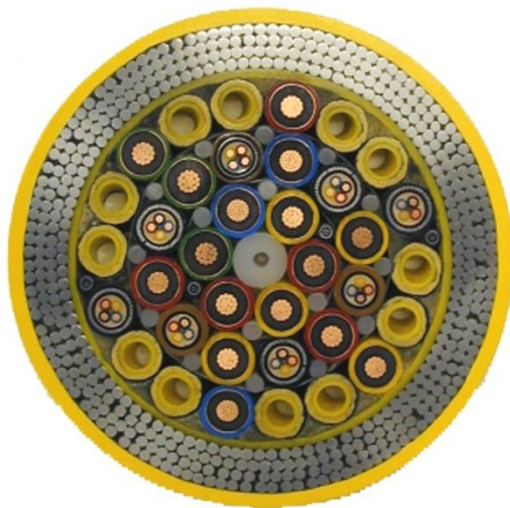


Figura 1 - Exemplo de cabo umbilical  
Fonte: (Technip, 2012)

Devido a razões construtivas e de custos, os condutores de potência e de sinal existentes num mesmo cabo umbilical encontram-se próximos uns aos outros e estão sujeitos a um tipo de acoplamento eletromagnético conhecido como *crosstalk* (Paul, 2006). O *crosstalk* é o acoplamento eletromagnético indesejado entre condutores, podendo causar tensões induzidas e interferências entre circuitos, como por exemplo, entre condutores de potência e sinal.

Assim, é possível que em um cabo de controle, no qual são monitorados os sinais de pressão de uma BCS, apareçam tensões induzidas em virtude do seu acoplamento com o circuito de potência. Essa situação pode inclusive acarretar erros de leitura dos sinais de interesse, acionamentos indevidos de alarmes ou até mesmo a interrupção do processo por erro de interpretação dos sinais medidos, ocasionando prejuízos enormes para as empresas exploratórias de petróleo.

Dessa forma, simulações de natureza eletromagnética têm sido cada vez mais importantes na fase de projeto de um cabo umbilical, sendo realizadas para atender aos requisitos de desempenho funcional de transmissão de energia e também do envio e recebimento de sinais de controle. Em outras palavras, o ideal é encontrar apenas sinais de potência nos condutores de potência e, sinais de controle nos condutores de controle. A caracterização elétrica dos cabos umbilicais, isto é, encontrar os parâmetros elétricos dos cabos, é fundamental para que os cabos umbilicais funcionem corretamente, fornecendo potência elétrica e comunicação sempre que necessário.

## 1.1 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

O objetivo principal deste trabalho é avaliar as matrizes de impedância de cabos umbilicais usando o método de elementos finitos, considerando a sua natureza distinta de construção e operação. Além desse tema, é objetivo secundário validar os resultados obtidos perante dados de fabricantes de cabos, metodologias analíticas conhecidas e outras ferramentas computacionais existentes.

Procura-se também, através do estudo realizado, analisar a variabilidade dos parâmetros estudados em função de diversos aspectos relacionados aos mesmos. Proceda-se a exemplificação de casos concretos, analisando a influência de aspectos, tais como:

- Frequência de operação;
- Trançamento dos cabos;
- Disposição geométrica dos condutores.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A avaliação eletromagnética de dispositivos diversos vem crescendo significativamente no Brasil nos últimos anos. Em termos gerais, o uso de ferramentas computacionais para o auxílio no projeto e análise é mais comum em fabricantes de máquinas elétricas rotativas e também de transformadores de potência, porém pode ser usada também no cálculo dos parâmetros elétricos de cabos umbilicais.

A ideia de desenvolver uma metodologia para cálculo de parâmetros de cabos teve início durante trabalhos realizados na empresa *Engineering Simulation and Scientific Software* (ESSS), na qual o mestrando trabalha desde o ano de 2009. A ESSS é responsável pela revenda e suporte de softwares da empresa americana ANSYS Inc., baseados no método de elementos finitos (MEF) para diversas áreas de engenharia, incluindo o eletromagnetismo. Durante a realização de trabalhos de consultoria prestados às empresas do setor de óleo e gás, surgiu a necessidade de implementar modelos computacionais para a realização de simulações a fim de obter as matrizes de parâmetros elétricos de cabos umbilicais.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto apresentado nesta dissertação está organizado em 5 capítulos. O presente capítulo tem por objetivo contextualizar a importância deste estudo para a indústria brasileira de óleo e gás, introduzindo conceitos, apresentando os objetivos e a motivação para a realização deste trabalho.

No segundo capítulo é apresentada a revisão bibliográfica realizada durante toda a pesquisa referente aos cabos umbilicais. São descritos os fundamentos da análise de cabos numa abordagem mais geral, tanto do ponto de vista do equacionamento analítico quanto da formulação e aplicação numérica.

O terceiro capítulo detalha o equacionamento analítico utilizado na análise de cabos com geometria simplificada, assim como o método dos elementos finitos aplicado ao cálculo das matrizes de impedância série dos cabos umbilicais.

Os resultados e comparações entre as diferentes metodologias são apresentados no quarto capítulo. Um primeiro caso compara os resultados da formulação analítica com os obtidos através do MEF. Posteriormente é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos através de medidas com os calculados através do MEF.

O último capítulo discorre sobre os resultados obtidos e as conclusões atingidas com os estudos realizados. Posteriormente, é apresentado como anexo o sequenciamento de código utilizado para obter os resultados analíticos.



## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 CABOS UMBILICAIS**

Diferentemente de outros cabos usados em sistemas de potência como, por exemplo, linhas de transmissão aéreas, os cabos umbilicais são geometricamente compactos. A distância entre condutores é muitas vezes comparável com a própria dimensão radial dos condutores. Os cabos umbilicais geralmente possuem geometrias complexas, o que dificulta ou até mesmo impossibilita a solução do tipo fechada. Entende-se por solução fechada, soluções para casos exclusivos, com restrições e simplificações muitas vezes válidas somente para os casos analisados. Devido aos efeitos pelicular e de proximidade, este tipo de cabo possui características dependentes da frequência mais acentuadas do que as linhas aéreas e, portanto, modelos que incluam tais efeitos são necessários para que análises transitórias e de regime sejam feitas com maior acurácia.

Tendo-se em mente que os cabos umbilicais são vistos como linhas de transmissão submarinas, eles são responsáveis por disponibilizar e fornecer energia elétrica às instalações consumidoras existentes no leito marinho, sendo elementos presentes em qualquer rede de distribuição de energia em meio subaquático, e considerados um dos componentes mais importantes das mesmas na distribuição energética.

Dada a crescente demanda de potência elétrica no leito marinho, a tendência observada nos últimos anos é que a quantidade de equipamentos elétricos submarinos cresça, aumentando também a demanda por potência elétrica. Sendo assim, os cabos submarinos deverão também ser projetados para atender a essa demanda.

#### **2.1.1 Características Construtivas**

Do ponto de vista das características construtivas, os IPU's podem ser classificados considerando-se diversos aspectos, tais como: material condutor, forma de construção do condutor, tipo de isolamento elétrico, presença de blindagem e/ou presença de armadura (Rocha, 2007).

Existem diversas topologias de cabos umbilicais. A forma e disposição dos condutores de potência e de comunicação, assim como o número de condutores e mangueiras hidráulicas, podem variar para atender aos diversos requisitos de projeto. O cabo umbilical típico possui secção circular, sendo constituído de várias camadas condutoras separadas entre si por camadas isolantes. Geralmente, cada um dos

cabos é composto por um núcleo e uma bainha, separados entre si e do meio que o envolve por elementos com propriedades isolantes. Um cabo umbilical simples é mostrado na Figura 2, na qual podem ser identificados os diversos condutores assim como os isolamentos em questão.

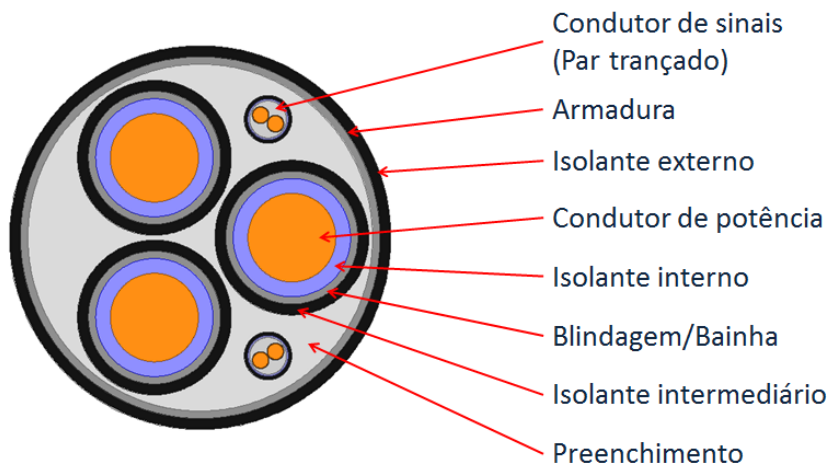


Figura 2 - Cabo Umbilical Trifásico com condutores de comunicação.

Em determinadas aplicações, um cabo umbilical pode ter na sua constituição, além dos elementos já citados, uma armadura exterior e uma outra camada isolante a separar a bainha da armadura. É importante salientar que o núcleo, a bainha e a armadura são tipicamente elementos com propriedades condutoras.

Sendo o núcleo condutor responsável por carregar a corrente elétrica de uma extremidade à outra, ele é considerado o elemento mais importante do cabo em termos elétricos. Enquanto a bainha é responsável pela proteção elétrica do cabo, a armadura, quando presente, é projetada quase que unicamente para fornecer resistência mecânica ao cabo. Os outros elementos servem basicamente para isolar eletricamente as diversas partes condutoras e também para blindar os campos elétricos existentes nos condutores.

Relativamente à forma da seção de cada cabo umbilical, inicia-se por estudar os cabos unipolares (SC) de forma circular. Essa abordagem deve-se essencialmente ao fato de os cabos unipolares serem a unidade básica num cabo umbilical. Outro aspecto considerado é o fato de toda a metodologia de cálculo e inclusivamente os exemplos



referidos no presente texto se reportarem aos sistemas trifásicos de cabos umbilicais, os quais são constituídos por conjuntos de cabos unipolares. A razão dessa abordagem é motivada pelo fato da quase exclusividade dos sistemas de cabos incorporados nas redes de distribuição serem trifásicos.

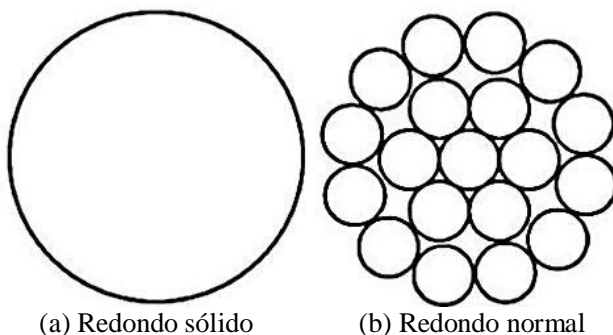
### 2.1.1.1 Condutores

Os condutores de corrente elétrica presentes nos cabos umbilicais são geralmente feitos de cobre ou alumínio. O alumínio é muito usado em linhas aéreas de distribuição e de transmissão, devido ao seu baixo custo quando comparado com o cobre. Além desse fator, o alumínio possui massa específica mais baixa, fazendo com que o transporte e manuseio dessas linhas sejam facilitados.

O cobre, por sua vez, também apresenta vantagens sobre o alumínio, sendo a principal, a condutividade elétrica. Enquanto o alumínio apresenta uma condutividade de  $34,2 \text{ Sm/mm}^2$  o cobre se mostra melhor condutor, tendo uma condutividade de  $61,7 \text{ Sm/mm}^2$ , cerca de 80% maior que a do alumínio. A relação entre condutividade e massa específica faz do cobre a melhor opção para cabos de menor secção.

A escolha do material condutor para os cabos umbilicais irá depender de diversos requisitos de projeto, como a potência nominal de transmissão, o grau de isolamento elétrica e proteção contra corrosão, além do método usado para a descida do cabo até o leito marinho.

Além dos tipos de materiais a serem empregados nos condutores, existem ainda diversos tipos, no quesito secção de condutores. A Figura 3 exemplifica algumas formas usadas para os condutores elétricos presentes nos cabos umbilicais.



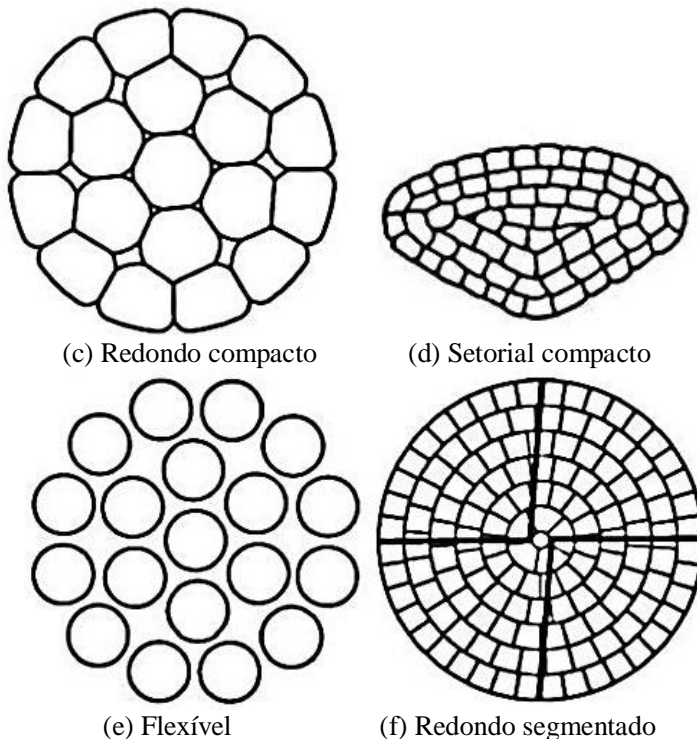


Figura 3 - Formas usadas para os condutores elétricos.

Fonte: (Rocha, 2007)

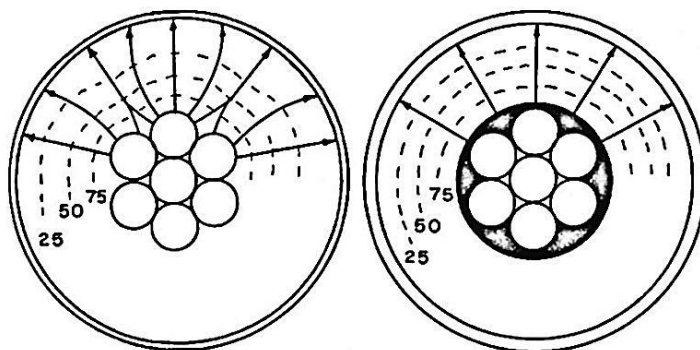
Cada uma das formas apresentadas possui vantagens e desvantagens, seja de origem construtiva ou de manutenção. O fio sólido apresentado na Figura 3 (a) possui ótima condutividade por aproveitar melhor o espaço disponível para a condução de corrente elétrica. Porém, é pouco manobrável e, para seções maiores que  $10\text{mm}^2$  perde sua praticidade. O condutor redondo normal (b) é constituído de diversos condutores conectados em paralelo. Devido a sua alta flexibilidade, é muito difundido em instalações residenciais e industriais. O condutor redondo compacto, apresentado na Figura 3 (c), é muito similar ao condutor redondo simples, possui inclusive um processo de fabricação muito semelhante. A principal diferença é que, ao final, esse é compactado, apresentando então uma secção total reduzida quando comparada com o condutor redondo normal. Além de perder um pouco de flexibilidade, essa forma de condutor possui uma homogeneização na distribuição de campo elétrico. O condutor setorial compacto, Figura 3

(d) é fabricado a partir do condutor redondo compacto, forçando-se sua passagem por uma série de calandras que deformam e moldam a secção final. Esse tipo de condutor apresenta uma secção ainda menor, proporcionando economia de materiais isolantes e homogeneização do campo elétrico. O condutor flexível, exemplificado na Figura 3 (e), é um conjunto de fios elementares de pequeno diâmetro utilizado principalmente em aplicações residenciais e industriais para equipamentos de pequeno porte. O condutor redondo segmentado, Figura 3 (f) possui a característica de ter divisões eletricamente isoladas umas das outras, garantindo uma melhor distribuição da corrente nos condutores e a minimização do efeito pelicular.

### 2.1.1.2 Blindagem ou Bainha

As blindagens existentes nos cabos umbilicais possuem características de condutores ou semicondutores e têm como finalidade confinar o campo elétrico criado pelos condutores e/ou escoar correntes induzidas e de curto-circuito. Dependendo da natureza do cabo, a blindagem pode ainda evitar as interferências de campos externos.

A blindagem mais próxima do condutor, também conhecida como blindagem interna, pode ser constituída de diferentes materiais, dependendo do nível de tensão dos condutores e do material usado na isolamento entre o condutor e a blindagem/bainha. No caso de cabos isolados de média e alta tensão, a blindagem interna pode ainda ser constituída de uma fita semicondutora. A Figura 4 retirada de (Mamede, 2011), ilustra a comparação das linhas equipotenciais entre dois cabos, um com blindagem e outro sem.



(a) Cabo sem blindagem interna      (b) Cabo com blindagem interna

Figura 4 - Linhas equipotenciais do condutor.

Fonte: (Mamede, 2011)

A blindagem da isolação ou blindagem externa segue os mesmos padrões de material que a blindagem interna, porém é geralmente composta pela associação de blindagem semicondutora e blindagem metálica.

### 2.1.1.3 Isolação

A função da isolação é a de isolar eletricamente os condutores do meio externo, sendo empregados materiais de alta resistividade. Existem basicamente dois tipos de isolação usados em cabos umbilicais: os dielétricos laminados ou extratificados, e os dielétricos sólidos ou extrudados.

Os dielétricos laminados são constituídos de finas lâminas de papel distribuídas helicoidalmente sobre os condutores e impregnadas em óleo isolante sob pressão. Posteriormente é ainda aplicada uma camada de chumbo ou alumínio com o objetivo de evitar a fuga do óleo e a penetração de umidade. O papel impregnado em óleo destaca-se por ser um isolante de alta confiabilidade e tem sua aplicação mais difundida em cabos usados em sistemas de alta e extra-alta tensão, de 69 a 550 kV.

Para os dielétricos sólidos ou extrudados, geralmente são usados materiais poliméricos de cadeia linear, termoplásticos ou termofixos, colocados diretamente sobre os condutores ou sobre a blindagem. Dos materiais termoplásticos, destaca-se o PVC (Cloro de Polivinila) e o PET (Polietileno).

O PVC é bastante usado em aplicações de até 15 kV, e apresenta as seguintes propriedades:

- Baixa taxa de envelhecimento;
- Excelente resistência à ionização;
- Boas propriedades mecânicas;
- Boa flexibilidade;
- Não conduz chama quando adicionado aditivos químicos especiais;
- Baixa rigidez dielétrica com perdas dielétricas elevadas a partir de 20 kV;
- Baixa temperatura admissível;
- Resistência regular à umidade.

O PET por sua vez apresenta excelentes constantes de isolamento, alta rigidez dielétrica com valores baixos de perdas dielétricas e baixa resistência à ionização. Entende-se por resistência à

ionização como a medida de tempo necessário para o aparecimento de fissuras nos material isolante quando este é exposto a descargas parciais. Dentre os diferentes tipos de polietileno termoplástico, duas variações são bastante comuns: o polietileno de baixa densidade (LDPE) e o polietileno de alta densidade (HDPE).

Os materiais termofixos são polímeros tridimensionais, produzidos por vulcanização a partir do polietileno reticulado (XLPE) e/ou etileno-propileno (EPR). O XLPE é obtido através de reticulação molecular do PET e possui alta rigidez dielétrica, baixa taxa de envelhecimento, baixa flexibilidade e é usado em cabos com tensão nominal de até 15 kV.

O EPR é um isolante sólido moderno e considerado um dos mais completos. Suas propriedades podem ser sumarizadas em:

- Alta rigidez dielétrica com baixas perdas dielétricas;
- Alta flexibilidade;
- Excelentes propriedades mecânicas;
- Elevada temperatura admissível;
- Elevada resistência à ionização.

A Tabela 1 resume as principais características dos isolantes sólidos.

Tabela 1 - Comparação entre os principais tipos de isolamento sólidos.

Características Nominais		Isolantes sólidos		
		Termoplásticos	Termofixos	
		PVC	XLPE	EPR
Rigidez dielétrica		Baixa	Alta	Alta
Flexibilidade		Boa	Regular	Regular
Temperatura Máxima (°C)	Reg. Contínuo	70	90	90
	Emergência	110	130	130
	Curto-circuito	160	250	250
Resistência à abrasão		Boa	Excelente	Excelente
Resistência à ionização		Excelente	Baixa	Excelente
Resistência mecânica		Excelente	Baixa	Elevada

Fonte: (Jow & Mendelsohn, 2003)

#### 2.1.1.4 Enchimentos

Os enchimentos são usados para preencher os espaços entre os diversos componentes do cabo umbilical. São preenchimentos sólidos, usando-se materiais como juta, algodão, fibra de vidro, geleia de petróleo ou os mesmos materiais usados para isolamento sólida descrita acima.

#### 2.1.1.5 Armadura

A armadura é parte essencial para os cabos umbilicais. Tem como principal finalidade dar resistência mecânica para o cabo para suportar os esforços radiais e de tração/compressão. Geralmente, a armadura é composta de uma fita de aço enrolada helicoidalmente em torno do cabo. Pode ser ainda uma fita corrugada de aço ou alumínio que garante maior flexibilidade.

A camada mais externa dos cabos umbilicais, chamada cobertura ou ainda isolamento externa, é uma camada não metálica que tem como objetivo proteger o conteúdo do cabo e é geralmente feita de PVC, sendo sobreposta à armadura.

### 2.2 MÉTODOS ANALÍTICOS PARA CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS

Os estudos de como calcular os parâmetros elétricos de cabos e de linhas aéreas originam-se muito antes da chegada dos computadores. Em 1926, Carson delineou um equacionamento para o cálculo da impedância de retorno pela terra para linhas aéreas (Carson, 1926) e nesse mesmo ano Pollaczek derivou fórmulas semelhantes para cálculo de cabos subterrâneos (Pollaczek, 1926). Em 1934, Schelkunoff publicou uma solução completa de campos eletromagnéticos no interior de cabos coaxiais de núcleo simples e o correspondente equacionamento para o cálculo das matrizes de impedância (Schelkunoff, 1934). As fórmulas para o cálculo de impedância de retorno pela terra e da impedância de cabos coaxiais de núcleo único são ainda muito usadas em programas numéricos para cálculo de parâmetros de cabos (Wedepohl & Wilcox, 1973). Para modelos baseados no domínio da frequência, um modelo geral para linhas aéreas e cabos subterrâneos foi desenvolvido por Wedepohl et al. em 1969 (Wedepohl, 1969). Para modelos baseados no domínio do tempo, um modelo geral foi apresentado por J. Marti em 1982. Nesse modelo, técnicas de ajuste de

curva são usadas para encontrar funções racionais para incluir as características dependentes da frequência encontrada na modelagem baseada no domínio da frequência.

Com o aumento da capacidade computacional, modelos e métodos mais sofisticados para o cálculo de parâmetros foram desenvolvidos. Em 1971, Tegopoulos et al. derivaram uma solução de campo para cabos do tipo *pipe-type* (PT) com condutores de seção circular (Tegopoulos & Kriezis, 1971). O equacionamento para o cálculo das matrizes de impedância para esse tipo de cabo foi então derivado por Brown et al. em 1976 (Brown & Rocamora, 1976).

Para casos de cabos com uma geometria complexa, ou casos onde se deseja considerar os efeitos pelicular e de proximidade, as soluções de forma fechada não mais se aplicam, pois não existe modelagem analítica que aborda tais problemas de forma geral. Métodos numéricos devem então ser usados.

## 2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS

A fim de calcular os parâmetros de cabos umbilicais com métodos numéricos, devem-se primeiramente resolver as equações diferenciais parciais das cargas, daí então os parâmetros podem ser derivados da solução numérica de campos.

A técnica mais conhecida de análise eletromagnética se dá através das consagradas equações de Maxwell (Bastos, 2003), as quais descrevem o comportamento do campo elétrico e magnético com o estabelecimento de relações entre cargas e correntes elétricas com permeabilidade, permissividade e condutividade dos diversos materiais envolvidos. Apesar das equações de Maxwell descreverem por completo o fenômeno físico observado, a aplicação direta das equações em geometrias complexas é difícil, sendo muitas vezes necessário recorrer a técnicas de cálculo numérico para obter a distribuição dos campos resultantes.

Vários métodos numéricos podem ser aplicados para solucionar o problema de campos eletromagnéticos necessários para o cálculo das matrizes de impedância série e admitância *shunt*. Entre os mais conhecidos, podem-se citar: método da subdivisão, método dos elementos finitos (MEF), método dos elementos de contorno (BEM), método das diferenças finitas (MDF) e métodos híbridos.

O método da subdivisão consiste em dividir os condutores de um sistema multicondutor em pequenos subcondutores de modo que a

distribuição de corrente possa ser considerada constante em cada subcondutor. Um conjunto de equações lineares é estabelecido usando-se as impedâncias próprias e mútuas entre cada subcondutor. A matriz de impedância série do sistema multicondutor pode então ser encontrada a partir da matriz de coeficientes do sistema de equações lineares usando-se técnicas de redução de matrizes. Esse método foi, primeiramente, aplicado ao cálculo de matrizes de impedância série por Comellini et al. em 1973 (Comellini, Inverzini, & Manzoni, 1973). Nesse documento, subcondutores circulares foram usados, porém subcondutores de forma retangulares também podem ser modelados, conforme estudado por Deeley et al. (Deeley & Okon, 1978) e Lucas et al. (Lucas & Talukdar, 1978). Com esse método, os parâmetros da impedância série de cabos são calculados sem resolver as equações de campo e somente as regiões consideradas condutoras são necessárias. A matriz de coeficientes, no entanto, é uma matriz completa e devem-se assumir permeabilidades constantes para todas as regiões consideradas. Dado que a densidade de corrente é considerada como uniforme dentro de cada subcondutor, problemas onde os efeitos pelicular e de proximidade são mais intensos devem ter as subdivisões mais refinadas.

Uma metodologia inicialmente utilizada para estruturas menos elaboradas é o Método das Diferenças Finitas (MDF) (Tannehill, Anderson, & Pletcher, 1997), por meio do qual se resolvem as equações diferenciais de uma determinada matriz representada por uma malha.

O MDF pode ser utilizado para a solução de grande parte dos problemas descritos pela física do eletromagnetismo, entretanto, quando é necessário estudar geometrias mais complexas, esse método não é o mais adequado pelo fato de que a geometria complexa não é discretizada de maneira ótima, conforme demonstrado no exemplo da Figura 5.

Outro método de cálculo numérico importante é o Método dos Elementos Finitos. O MEF foi inicialmente divulgado por volta dos anos 60 (Huebner, Dewhirst, Smith, & Byrom, 1976), já então tendo sido utilizado na área aeroespacial (Clough, 1960).

O MEF é um método matemático para a solução de equações diferenciais parciais, tais como as equações de Poisson e Laplace (Bastos, 2004). O conceito mais fundamental do MEF é o de que “toda função contínua, seja ela de temperatura, pressão ou deslocamento, pode ser aproximada por um modelo composto de um conjunto de funções contínuas (dentro de um intervalo) definidas sobre um número finito de subdomínios”, denominados por elementos finitos (Segerlind, 1984). Estudos a respeito da discretização de funções contínuas iniciaram-se em 1943 pelo matemático Courant, seguindo a ideia de utilização de



elementos triangulares e o princípio da minimização da energia potencial em estudos de torção em peças mecânicas.

Com o Método dos Elementos Finitos, um domínio limitado por condições de contorno é dividido em pequenos elementos de modo que a distribuição de campo, originalmente desconhecida em cada elemento, possa ser aproximada por certas funções expressas em termos de variáveis de campo nos vértices de cada elemento. Os valores das variáveis de campo em cada vértice da malha de elementos podem, então, ser determinados usando o método variacional ou o método de Galerkin. No começo dos anos 70, essa técnica começou a ser aplicada a problemas de correntes parasitas em dispositivos de potência. Foi, então, usada para determinar a distribuição de campo em dispositivos magnéticos como motores, por Chari em 1974 (Chari, 1974), em um caso de estudo onde foi assumido condutores com propriedades supercondutoras. O Método de Elementos Finitos foi empregado para o estudo do efeito pelicular em um único condutor de corrente também por Chari, em 1977 (Chari & Csendes, 1977).

O sistema de equações lineares finais definidas no MEF é geralmente composto de matrizes simétricas, o que facilita a solução. Esse método é conhecido por conseguir manejar regiões com diferentes permeabilidades magnéticas, sendo também flexível aos tipos dos elementos assim como a ordem das funções de forma.

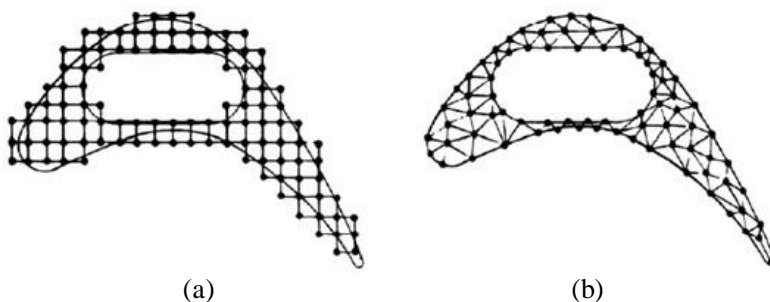


Figura 5 - Exemplos de malha de elementos finitos para MDF(a) e MEF(b).

Fonte: (Huebner, Dewhirst, Smith, & Byrom, 1976)

Até meados da década de 80, o MEF aplicado a problemas de eletromagnetismo não havia sido difundido em nível industrial, muito provavelmente pela dificuldade de geração de malha, a qual requisitava um processo extremamente manual para a criação dos nós da malha de elementos finitos. Até então, a utilização do método era restrita ao mundo acadêmico e a partir do avanço tecnológico dos computadores e

dos vários métodos de geração automática de malhas, passou a ser utilizado também na indústria com o objetivo principal de aumentar a precisão de projetos e minimizar os custos com a montagem de protótipos e com perdas na produção.

### 3 METODOLOGIA DE CÁLCULO DE PARÂMETROS

Neste capítulo, é apresentada uma descrição da metodologia usada para calcular os parâmetros longitudinais e transversais, variantes com a frequência, em cabos genéricos, podendo-se estender os estudos para o caso particular dos cabos umbilicais.

O problema é abordado num contexto de engenharia, embora também sejam estudadas situações de natureza mais teórica. São também levadas em consideração algumas situações que influenciam consideravelmente os resultados finais e as conclusões que daí possam advir.

Existe uma grande diversidade de cabos umbilicais que diferem na constituição, forma e materiais utilizados nas diversas estruturas que os compõem (Bonneville Power Administration, 1986). Em relação à forma, assume-se para efeitos de cálculo, que os cabos usados têm secção circular e formato cilíndrico. Esta simplificação deve-se essencialmente a duas motivações: uma maior simplicidade de cálculo e o fato de, em termos práticos, a maior parte dos cabos usados ser de formato cilíndrico. Relativamente à constituição dos cabos umbilicais, salienta-se que a grande diferenciação existente centra-se no fato de esses possuírem ou não armadura. Para aplicações usadas ao nível da distribuição de energia subaquática, os cabos umbilicais usados geralmente apresentam armadura.

#### 3.1 METODOLOGIA ANALÍTICA

Um cabo umbilical é uma estrutura constituída por vários elementos com diferentes finalidades e por isso também com diferentes propriedades eletromagnéticas. Muitas vezes os elementos que constituem o cabo têm propriedades condutoras, semicondutoras e isolantes. Na formulação aqui descrita, considera-se que os cabos umbilicais são elementos unipolares, ou seja, cada cabo do sistema tem um único núcleo na sua constituição. Admitindo que um cabo tenha uma armadura incorporada na sua estrutura, identificam-se três elementos condutores nos quais poderá ocorrer circulação de correntes, embora apenas o núcleo do cabo seja um condutor por excelência.

A metodologia base para o estudo apresentado nesta seção é fundamentada nos estudos apresentados por Akihiro Ametani, da Universidade Doshisho, situada na cidade de Kyoto, Japão, com a qual é possível obter os parâmetros elétricos de um sistema com  $N$  elementos metálicos e  $N$  cabos mutuamente acoplados em função da frequência. E

também, nos estudos realizados por Schelkunoff e Wedepohl na temática do cálculo de impedância considerando o efeito pelicular.

Essas metodologias são genéricas, podendo ser utilizadas para obter as matrizes de impedância e admitância para cabos coaxiais de núcleo simples (SC) e cabos do tipo *pipe-type* (PT). A formulação desenvolvida por A. Ametani considera algumas suposições:

- As correntes de deslocamento e as perdas dielétricas são desprezíveis;
- Os materiais envolvidos são considerados com permeabilidade constante;
- Não existe circulação de corrente nos dielétricos envolvidos.

Considere o cabo umbilical representado na Figura 6, constituído por três camadas condutoras, aqui definidas por: núcleo (C), bainha ou blindagem (S) e armadura (A). Estas camadas condutoras estão eletricamente isoladas entre si e da terra por camadas isolantes, as quais são definidas como: isolador interno (I), isolador intermediário (B) e isolador externo (P). Perante a referida constituição, estabelecer-se-ão tensões induzidas entre as várias superfícies condutoras, que caso estejam corretamente ligadas à terra, irão originar vários loops de corrente entre as referidas superfícies. Dessa forma, estabelecem-se malhas de corrente no núcleo com retorno pela bainha, na bainha com retorno pela armadura e na armadura com retorno pela terra (Ametani, 1980).

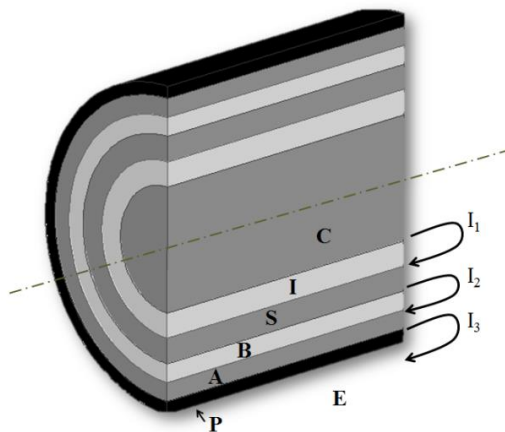


Figura 6 - Corte transversal de um cabo SC, constituído por núcleo (C), isolamento interno (I), intermediário (B) e externo (P), bainha metálica (S) e armadura (A).

Levando em consideração o fenômeno representado na Figura 6, pode-se descrever o conjunto de loops ou malhas de corrente existentes entre as várias superfícies condutoras por um sistema matricial de equações. O sistema matricial permite descrever cada uma das tensões e correntes existentes em função das impedâncias e admitâncias do sistema. Com o conhecimento das impedâncias e admitâncias entre os vários elementos constituintes de um cabo umbilical, torna-se imediata a obtenção dos parâmetros elétricos do mesmo, resistência, indutância, capacitância e condutância, fundamentais para análises sistêmicas.

A impedância e a admitância de um sistema de cabos pode ser definida com duas equações:

$$\frac{d(\mathbf{V})}{dx} = -[\mathbf{Z}] \cdot (\mathbf{I}) \quad (3.1)$$

$$\frac{d(\mathbf{I})}{dx} = -[\mathbf{Y}] \cdot (\mathbf{V}) \quad (3.2)$$

Onde  $(\mathbf{V})$  e  $(\mathbf{I})$  são os vetores que caracterizam as tensões e correntes em um ponto  $x$  do cabo.  $[\mathbf{Z}]$  e  $[\mathbf{Y}]$  são matrizes quadradas que definem a impedância série, dada em  $\Omega/\text{m}$ , e a admitância *shunt*, dada em  $\text{S}/\text{m}$ , respectivamente.

De modo geral, essas matrizes podem ser expressas no somatório de diferentes termos, conforme a seguir:

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_i] + [\mathbf{Z}_p] + [\mathbf{Z}_c] + [\mathbf{Z}_o] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}] &= s \cdot [\mathbf{P}]^{-1} \\ [\mathbf{P}] &= [\mathbf{P}_i] + [\mathbf{P}_p] + [\mathbf{P}_c] + [\mathbf{P}_o] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Onde  $[\mathbf{P}]$  é a matriz de coeficientes de potencial e  $s = j\omega$ . Nas equações descritas, as matrizes com subíndice “i” são relativas aos termos encontrados em cabos de tipo SC e as matrizes com subíndice “p” e “c” são relativos aos cabos enclausurados do tipo PT. O subíndice “o” é relativo às matrizes do meio externo, seja água do mar ou simplesmente ar.

### 3.1.1 Metodologia aplicada no cálculo de parâmetros série em sistemas de cabos tipo SC

No caso de um cabo com núcleo condutor, blindagem metálica, e armadura, o circuito equivalente de impedâncias é exemplificado na Figura 7.

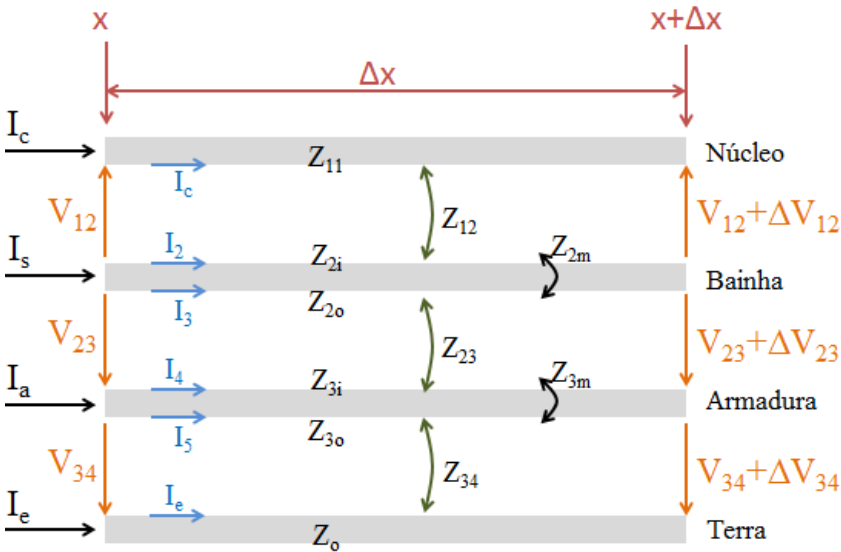


Figura 7 - Circuito equivalente de impedâncias para um cabo tipo SC.

Fonte: (Ametani, 1980)

As impedâncias mostradas na Figura 7 são definidas por  $Z_{11}$  a impedância do núcleo,  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$  e  $Z_{34}$  as impedâncias dos isolantes externo ao núcleo, externo a bainha e externo a armadura. As impedâncias  $Z_{2i}$  e  $Z_{3i}$  são relativas a superfície interna da bainha e da armadura, respectivamente.  $Z_{2o}$  e  $Z_{3o}$ , são as impedâncias das superfícies externas a bainha e à armadura, respectivamente. A impedância do meio externo é definida como  $Z_o$ , enquanto que as impedâncias  $Z_{2m}$  e  $Z_{3m}$  são as impedâncias mútuas entre núcleo e bainha e armadura e bainha, respectivamente.

São definidas as correntes que circulam no núcleo, blindagem, armadura e meio externo por  $I_c$ ,  $I_s$ ,  $I_a$  e  $I_e$ , respectivamente, e também as correntes circulantes na superfície interna e externa de cada secção condutora como:  $I_2$  a corrente da superfície interna da bainha,  $I_3$  a corrente na superfície externa da bainha,  $I_4$  a corrente interna da armadura e  $I_5$  a corrente externa da armadura.

Além das correntes, definem-se também as tensões existentes entre cada parte condutora, a saber:  $V_{12}$  a tensão entre núcleo e bainha,  $V_{23}$  a tensão entre bainha e armadura e  $V_{34}$  a tensão entre armadura e o meio externo, todas relativas à posição  $x$ , ao longo do cabo.

Considerando um trecho de cabo de comprimento  $\Delta x$ , definem-se novas tensões no outro extremo desta seção de cabo, incluindo uma variação de tensão:  $V_{12} + \Delta V_{12}$ , a tensão entre bainha e núcleo na posição  $x + \Delta x$ , assim como a tensão entre bainha e armadura  $V_{23} + \Delta V_{23}$ , e a tensão entre armadura e o meio externo,  $V_{34} + \Delta V_{34}$ .

Com essas definições, é possível estabelecer algumas relações:

$$\begin{aligned} I_2 &= -I_c \\ I_3 &= -I_4 \\ I_5 &= -I_e \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} I_s &= I_2 + I_3 = -(I_c + I_4) \\ I_a &= I_4 + I_5 = I_4 - I_e \end{aligned} \tag{3.6}$$

A partir dessas, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} I_4 &= -(I_c + I_s) \\ I_e &= -(I_c + I_s + I_a) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Considerando as correntes acima descritas e as impedâncias definidas, é possível deduzir a equação para cada uma das tensões existentes na estrutura de cabo mostrada na Figura 7.

$$\begin{aligned}
V_{12} &= \mathbf{Z}_{11} \cdot \Delta x \cdot \mathbf{I}_C - \mathbf{Z}_{12} \cdot \Delta x \cdot \mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_{2i} \cdot \Delta x \cdot \mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_{2m} \cdot \Delta x \cdot \mathbf{I}_3 + V_{12} + \Delta V_{12} \\
\therefore \frac{-\Delta V_{12}}{\Delta x} &= (\mathbf{Z}_{11} + \mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{2i}) \cdot \mathbf{I}_C + \mathbf{Z}_{2m} \cdot \mathbf{I}_4
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Definindo-se a equação auxiliar  $\mathbf{Z}_{CS}$  por:

$$\mathbf{Z}_{CS} = \mathbf{Z}_{11} + \mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{2i} \tag{3.9}$$

Simplifica-se a equação para a tensão entre o núcleo e a bainha por:

$$\frac{-\Delta V_{12}}{\Delta x} = \mathbf{Z}_{CS} \cdot \mathbf{I}_C + \mathbf{Z}_{2m} \cdot \mathbf{I}_4 \tag{3.10}$$

De forma semelhante, equaciona-se a tensão entre a bainha e a armadura:

$$\frac{-\Delta V_{23}}{\Delta x} = (\mathbf{Z}_{20} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{3i}) \cdot \mathbf{I}_4 + \mathbf{Z}_{2m} \cdot \mathbf{I}_C - \mathbf{Z}_{3m} \cdot \mathbf{I}_e \tag{3.11}$$

Definindo-se a equação auxiliar  $\mathbf{Z}_{SA}$  por:

$$\mathbf{Z}_{SA} = \mathbf{Z}_{20} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{3i} \tag{3.12}$$

Pode-se simplificar também a equação para a tensão  $V_{23}$ :

$$\frac{-\Delta V_{23}}{\Delta x} = \mathbf{Z}_{SA} \cdot \mathbf{I}_4 + \mathbf{Z}_{2m} \cdot \mathbf{I}_C - \mathbf{Z}_{3m} \cdot \mathbf{I}_e \tag{3.13}$$

O mesmo procedimento é realizado para a tensão entre a armadura e o meio externo, obtendo-se:

$$\frac{-\Delta V_{34}}{\Delta x} = (\mathbf{Z}_{a4} + \mathbf{Z}_0) \cdot \mathbf{I}_e + \mathbf{Z}_{3m} \cdot \mathbf{I}_4 \tag{3.14}$$

$$\text{Onde:} \quad \mathbf{Z}_{a4} = \mathbf{Z}_{30} + \mathbf{Z}_{34} \tag{3.15}$$



Considerando o potencial elétrico como nulo no meio externo, ou seja, tomando-o como referência, podem-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} V_a &= -V_{34} \\ V_s &= -(V_{23} + V_{34}) = V_a - V_{23} \\ V_c &= V_{12} + V_s \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo-se as equações 3.3 e 3.12 na equação 3.10 obtém-se:

$$\frac{-\Delta V_a}{\Delta x} = (Z_{a4} - Z_{3m} + Z_0) \cdot (I_c + I_s) + (Z_{a4} + Z_0) \cdot I_a \quad (3.17)$$

Substituindo-se as equações 3.3, 3.12 e 3.13 na equação 3.9 obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta V_s}{\Delta x} &= (Z_{SA} + Z_{a4} - Z_{2m} - 2Z_{3m} + Z_0) \cdot I_c + \dots \\ &\dots + (Z_{SA} + Z_{a4} - 2Z_{3m} + Z_0) \cdot I_s + (Z_{a4} - Z_{3m} + Z_0) \cdot I_a \end{aligned} \quad (3.18)$$

E de forma semelhante pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta V_c}{\Delta x} &= (Z_{CS} + Z_{SA} + Z_{a4} - 2Z_{2m} - 2Z_{3m} + Z_0) \cdot I_c + \dots \\ &\dots + (Z_{SA} + Z_{a4} - Z_{2m} - Z_{3m} + Z_0) \cdot I_s + \dots \\ &\dots + (Z_{a4} - Z_{3m} + Z_0) \cdot I_a \end{aligned} \quad (3.19)$$

Finalmente, das equações 3.13, 3.14 e 3.15 e com  $x \rightarrow 0$ , pode-se escrever a matriz de impedância série do cabo SC como sendo:

$$[Z] = [Z_i] + [Z_0] \quad (3.20)$$

A matriz de impedância série é, então, composta de duas submatrizes,  $\mathbf{Z}_i$  a chamada matriz de impedância interna do cabo e  $\mathbf{Z}_0$  a matriz de impedância de corrente de retorno.

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_i] &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{CC} & \mathbf{Z}_{CS} & \mathbf{Z}_{CA} \\ \mathbf{Z}_{CS} & \mathbf{Z}_{SS} & \mathbf{Z}_{SA} \\ \mathbf{Z}_{CA} & \mathbf{Z}_{SA} & \mathbf{Z}_{AA} \end{bmatrix}; \\ [\mathbf{Z}_0] &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Onde cada um dos termos da matriz de impedância interna é descrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{CC} &= \mathbf{Z}_{CS} + \mathbf{Z}_{SA} + \mathbf{Z}_{a4} - 2(\mathbf{Z}_{2m} + \mathbf{Z}_{3m}) \\ \mathbf{Z}_{SS} &= \mathbf{Z}_{SA} + \mathbf{Z}_{a4} - 2\mathbf{Z}_{3m} \\ \mathbf{Z}_{AA} &= \mathbf{Z}_{a4} \\ \mathbf{Z}_{CS} &= \mathbf{Z}_{SA} + \mathbf{Z}_{a4} - \mathbf{Z}_{2m} - 2\mathbf{Z}_{3m} \\ \mathbf{Z}_{SA} &= \mathbf{Z}_{a4} - \mathbf{Z}_{3m} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Os termos que compõem cada uma dessas impedâncias, mostrados na Figura 7, foram definidos por Schelkunoff e são descritos como:

- Impedância interna do núcleo:

$$\mathbf{Z}_{II} = \left( \frac{s\mu_0\mu_1}{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{1}{x_2 D_1} \right) \cdot \{ I_0(x_2) \cdot K_1(x_1) + K_0(x_2) \cdot I_1(x_1) \} \quad (3.23)$$

- Impedância do isolante externo ao núcleo:

$$\mathbf{Z}_{12} = \left( \frac{s\mu_0\mu_{i1}}{2\pi} \right) \cdot \ln \left( \frac{r_3}{r_2} \right) \quad (3.24)$$

- Impedância da superfície interna da bainha:

$$\mathbf{Z}_{2i} = \left( \frac{s\mu_0\mu_2}{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{1}{x_3 D_2} \right) \cdot \{I_0(x_3) \cdot K_1(x_4) + K_0(x_3) \cdot I_1(x_4)\} \quad (3.25)$$

- Impedância mútua da bainha:

$$\mathbf{Z}_{2m} = \frac{\rho_2}{2\pi r_3 r_4 D_2} \quad (3.26)$$

- Impedância interna da superfície externa da bainha:

$$\mathbf{Z}_{20} = \left( \frac{s\mu_0\mu_2}{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{1}{x_4 D_2} \right) \cdot \{I_0(x_4) \cdot K_1(x_3) + K_0(x_4) \cdot I_1(x_3)\} \quad (3.27)$$

- Impedância do isolante externo a bainha:

$$\mathbf{Z}_{23} = \left( \frac{s\mu_0\mu_{i2}}{2\pi} \right) \cdot \ln \left( \frac{r_5}{r_4} \right) \quad (3.28)$$

- Impedância interna da superfície interna da armadura:

$$\mathbf{Z}_{3i} = \left( \frac{s\mu_0\mu_3}{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{1}{x_5 D_3} \right) \cdot \{I_0(x_5) \cdot K_1(x_6) + K_0(x_5) \cdot I_1(x_6)\} \quad (3.29)$$

- Impedância mútua da armadura:

$$\mathbf{Z}_{3m} = \frac{\rho_2}{2\pi r_5 r_6 D_3} \quad (3.30)$$

- Impedância interna da superfície externa da armadura:

$$Z_{30} = \left( \frac{s\mu_0\mu_3}{2\pi} \right) \cdot \left( \frac{1}{x_6 D_3} \right) \cdot \{ I_0(x_6) \cdot K_1(x_5) + K_0(x_6) \cdot I_1(x_5) \} \quad (3.31)$$

- Impedância do isolante externo:

$$Z_{34} = \left( \frac{s\mu_0\mu_{i3}}{2\pi} \right) \cdot \ln \left( \frac{r_7}{r_6} \right) \quad (3.32)$$

Onde são definidas equações auxiliares:

$$\begin{aligned} D_1 &= I_1(x_2) \cdot K_1(x_1) - I_1(x_1) \cdot K_1(x_2) \\ D_2 &= I_1(x_4) \cdot K_1(x_3) - I_1(x_3) \cdot K_1(x_4) \\ D_3 &= I_1(x_6) \cdot K_1(x_5) - I_1(x_5) \cdot K_1(x_6) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} x_k &= \beta_k \sqrt{s} \\ \beta_n &= r_n \sqrt{\mu_0 \mu_{n-1} / \rho_{n-1}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Onde  $n$  é o número de camadas condutoras e isolantes existentes no cabo e, para um cabo coaxial analisado com 7 camadas os diversos raios das camadas são representados por  $r_n$ . De maneira semelhante as diferentes permeabilidades magnéticas relativas são representadas por  $\mu_j$ , onde  $j$  representa o numero total de materiais distintos usados e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, que vale aproximadamente  $1,256 \times 10^{-6} H/m$ . A condutividade dos materiais é considerada através de  $\rho_k$ , onde  $k$  representa o número de condutores do cabo coaxial.

Os termos  $I_0(X)$  são funções modificadas de Bessel de primeira espécie e ordem zero, enquanto que  $I_1(X)$  são funções modificadas de Bessel de segunda espécie, de ordem um. Os termos  $K_0(X)$  são funções modificadas de Bessel de segunda espécie e ordem zero, enquanto que  $K_1(X)$  são funções modificadas de Bessel de segunda espécie, de primeira ordem e  $X$  é o argumento das funções.

Um sistema de cabos pode ser submarino, aéreo, subterrâneo ou a combinação de aéreo e subterrâneo. A avaliação da influência do caminho de retorno de corrente, extensiva em cálculos de impedâncias, é feita aplicando-se a metodologia compatível com o tipo de sistema de cabos em questão:

- Sistema aéreo – Formulação de Carson;
- Sistema subterrâneo – Formulação de Pollaczek;
- Sistema submarino – Formulação de Bianchi e Luoni.

### 3.1.2 Metodologia aplicada no cálculo de parâmetros transversais em sistemas de cabos tipo SC

Um circuito equivalente de admitâncias, aqui consideradas puramente capacitivas, para um cabo do tipo SC, com núcleo, bainha e armadura, pode ser visto na Figura 8. E desta, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 I_C &= Y_{CS} \Delta x (V_C - V_S) + I_C + \Delta I_C \\
 I_S &= Y_{CS} \Delta x (V_S - V_C) + Y_{SA} \Delta x (V_S - V_a) + I_S + \Delta I_S \\
 I_a &= Y_{sa} \Delta x (V_a - V_S) + Y_{a4} \Delta x V_a + I_a + \Delta I_a
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

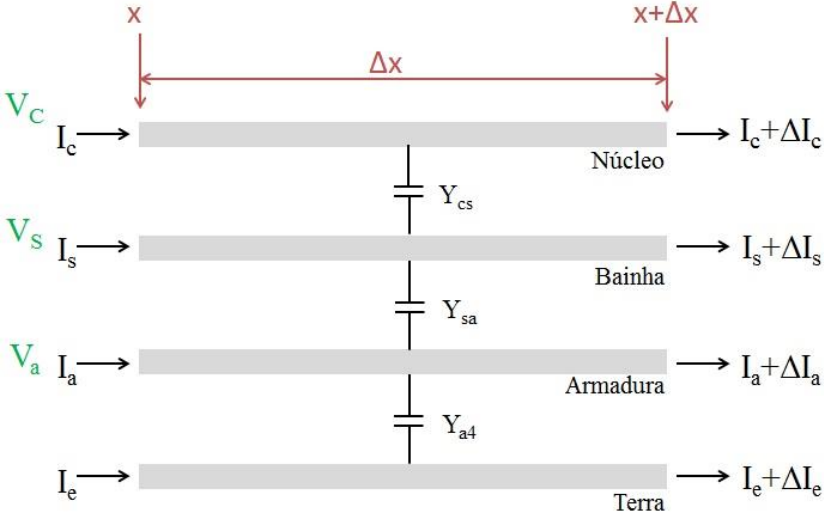


Figura 8 - Circuito equivalente de admitâncias para um cabo tipo SC.

Fonte: (Ametani, 1980)

Reescrevendo as equações definidas em (3.35):

$$\begin{aligned}
 \frac{-\Delta I_c}{\Delta x} &= Y_{CS} (V_C - V_S) \\
 \frac{-\Delta I_s}{\Delta x} &= -Y_{CS} V_C + (Y_{CS} + Y_{SA}) V_S - Y_{sa} V_a \\
 \frac{-\Delta I_a}{\Delta x} &= Y_{sa} V_S + (Y_{sa} + Y_{a4}) V_a
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fazendo  $x$  tender a zero, pode-se formar o sistema de equações:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_c \\ I_s \\ I_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{CS} & -Y_{CS} & 0 \\ -Y_{CS} & (Y_{CS} + Y_{SA}) & -Y_{sa} \\ 0 & -Y_{sa} & (Y_{sa} + Y_{a4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_C \\ V_S \\ V_a \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
Y_{CS} &= s2\pi\epsilon_0\epsilon_{i1} \Big/ \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \\
Y_{sa} &= s2\pi\epsilon_0\epsilon_{i2} \Big/ \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right) \\
Y_{a4} &= s2\pi\epsilon_0\epsilon_{i3} \Big/ \ln\left(\frac{r_7}{r_6}\right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Sendo os coeficientes potenciais inversamente proporcionais às admitâncias, escreve-se:

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_C + P_S + P_A & P_S + P_A & P_A \\ P_S + P_A & P_S + P_A & P_A \\ P_A & P_A & P_A \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
P_C &= s/Y_{CS} \\
P_S &= s/Y_{sa} \\
P_A &= s/Y_{a4}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Onde:

### 3.2 METODOLOGIA NUMÉRICA

Esta sessão é centrada na formulação das equações de campo e na correspondente solução utilizando-se o MEF. Os parâmetros série, a resistência e indutância por unidade de comprimento, são definidos e correlacionados aos parâmetros encontrados na formulação de linhas de transmissão. As principais equações que descrevem os campos magnéticos para o cálculo da matriz de impedância  $\mathbf{Z}$  são descritas e, então, essas são solucionadas utilizando-se o MEF baseado no método de Galerkin.

Para calcular os parâmetros de  $\mathbf{Z}$  a partir da solução de campos, é utilizado um software comercial que divide as perdas ôhmicas e a energia magnética armazenada no sistema em somatórios dos elementos que são relacionados aos elementos encontrados na matriz  $\mathbf{Z}$ .

Como os campos magnéticos para cabos mais simples podem ser calculados analiticamente, essa solução pode ser usada para comparar os valores calculados usando o MEF.

Uma linha de transmissão ou um cabo umbilical pode ser representado por um sistema multicondutor genérico, no qual as seguintes suposições podem ser feitas:

1. O sistema multicondutor é composto de condutores metálicos de comprimento infinito;
2. Os eixos dos condutores são paralelos entre si e à superfície da terra;
3. O sistema é isotrópico, linear e homogêneo em todo seu comprimento;
4. Todos os condutores e dielétricos possuem permissividade, permeabilidade e condutividade constantes;
5. Não há carga volumétrica dentro dos condutores ou da terra. As cargas são localizadas somente nas superfícies dos condutores e da terra;
6. Correntes de deslocamento nos condutores e na terra são ignoradas;
7. As frequências consideradas neste estudo são muito inferiores àquelas em que o comprimento de onda  $\lambda$  torna-se comparável com o raio do maior condutor.

### 3.2.1 Principais equações para o cálculo da matriz $\mathbf{Z}$

A matriz de impedância  $\mathbf{Z}$  de um cabo de potência, seja ele um umbilical ou um cabo subterrâneo, pode ser calculada a partir do campo magnético no interior e no exterior do cabo. Para realizar tal cálculo, é necessário calcular primeiramente a distribuição de campos.

Baseando-se nas suposições 1, 2 e 3 descritas anteriormente, o campo eletromagnético de um sistema de cabos é bidimensional e linear.

De modo a isolar o campo magnético do sistema, em adição à suposição feita no item 6 da sessão anterior, correntes de deslocamento nos dielétricos também devem ser ignoradas. Como resultado, o campo eletromagnético original torna-se um campo magnético quase-estático, que é excitado somente por correntes circulando nos condutores. Ignorar a corrente de deslocamento para o cálculo dos parâmetros série é uma prática comum e aceita (Carson, 1926).



Considerando-se as suposições feitas, derivam-se as seguintes equações de Maxwell no domínio da frequência para a magnetodinâmica:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.43)$$

Onde  $\mathbf{E}$  representa o vetor campo elétrico,  $\mathbf{B}$  a densidade indução magnética,  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente elétrica e  $\mu$  a permeabilidade magnética.

Para o presente estudo considerou-se a densidade de corrente de condução ( $\mathbf{J}$ ) muito superior à densidade de corrente de deslocamento ( $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ), ou seja,  $\mathbf{J} \gg \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .

Introduzindo o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.44)$$

E inserindo (3.44) na equação (3.42), e empregando a propriedade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.45)$$

A seguinte equação pode ser obtida:

$$\frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (3.46)$$

Assumindo-se que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.47)$$

A equação (3.46) torna-se:

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (3.48)$$

Como a densidade de corrente possui apenas componente longitudinal,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{A}$  podem ser escritos respectivamente como  $\mathbf{J}\mathbf{u}_z$ ,  $\mathbf{E}\mathbf{u}_z$  e  $\mathbf{A}\mathbf{u}_z$ , onde  $\mathbf{u}_z$  é o vetor unitário definido ao longo do eixo z. Inserindo-se (3.44) em (3.41), a seguinte equação pode ser estabelecida:

$$(E + j\omega A)\mathbf{u}_z = -\nabla\phi \quad (3.49)$$

Onde  $\phi$  é uma função escalar. A referência (Konrad, 1982) fornece as propriedades de  $\phi$  em um condutor: as superfícies equipotenciais de  $\phi$  são perpendiculares ao eixo z e  $\nabla\phi$  é constante dentro de cada condutor. Tais propriedades fazem com que seja possível definir uma tensão única entre um condutor e o condutor de referência numa dada posição do sistema. Um  $-\nabla\phi$  constante em cada condutor é definido como a fonte de campo elétrico  $E_s$ . O sentido físico de  $E_s$  (ou  $-\nabla\phi$ ) é a queda de tensão na unidade de comprimento do sistema de cabos. A densidade de corrente correspondente a  $E_s$  é chamada densidade de corrente fonte,  $\mathbf{J}_s$ . Considerando-se a condutividade  $\sigma$ , essas quantidades são relacionadas por:

$$\mathbf{J}_s\mathbf{u}_z = \sigma E_s\mathbf{u}_z = -\sigma\nabla\phi \quad (3.50)$$

E a equação (3.49) pode, agora, ser escrita na forma:

$$\mathbf{J} = -j\omega\sigma\mathbf{A} + \mathbf{J}_s \quad (3.51)$$

Combinando as equações (3.48) e (3.51), a seguinte equação de difusão bidimensional linear pode ser obtida, onde  $\omega$  :

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} - j\omega\sigma\mathbf{A} + \mathbf{J}_s = 0 \quad (3.52)$$

A integração de (3.51) sobre a secção de um condutor resulta em:

$$\mathbf{I} = \int_{S_C} \mathbf{J} ds = -j\omega \int_{S_C} \mathbf{A} ds + S_C \mathbf{J}_S \quad (3.53)$$

Onde  $S_C$  é a área da secção do condutor. Para um sistema multicondutor, existirá uma equação destas para cada condutor. As equações (3.52) e (3.53) são as principais equações que descrevem os campos magnéticos quase-estáticos, necessárias para o cálculo da matriz de impedância série  $\mathbf{Z}$ .

Para um sistema multicondutor, com  $K$  condutores, as equações descritas anteriormente, necessárias para o cálculo da matriz de impedância série  $\mathbf{Z}$ , podem ser sumarizadas na seguinte forma:

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} - j\omega \sigma \mathbf{A} + \mathbf{J}_S = 0 \quad \text{em} \quad S_R \quad (3.54)$$

$$-j\omega \int_{S_{Ck}} \mathbf{A} ds + S_{Ck} \mathbf{J}_{S_k} = \mathbf{I}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (3.55)$$

Com condições de contorno definidas:

$$\mathbf{A}|_{\Gamma_0} = g_0(x, y) \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0 \quad (3.57)$$

Onde  $S_R$  é o domínio de cálculo limitado pelas condições de contorno  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ .  $S_{Ck}$  e  $\mathbf{J}_{S_k}$  são a secção transversal e a densidade de corrente fonte do  $k$ -ésimo condutor, respectivamente.  $g_0(x, y)$  é uma função conhecida e  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são as fronteiras das condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

### 3.2.2 Solução de equações diferenciais com o método de Galerkin

O método de Galerkin aproxima a distribuição do potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , satisfazendo à equação diferencial (3.54) por um conjunto finito de funções base  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), como:

$$\mathbf{A} = \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \quad (3.58)$$

Onde  $a_1, a_2, \dots, a_N$  são coeficientes desconhecidos e  $\psi_0$  é definido como:

$$\psi_0|_{\Gamma_0} = g_0 \quad (3.59)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  formam um subconjunto das possíveis funções de base de  $\mathbf{A}$  e  $\varphi_n$  satisfaz à condição de contorno:

$$\varphi_n|_{\Gamma_0} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.60)$$

Usando a solução aproximada (3.58) na equação (3.54), é introduzido um resíduo, definido abaixo:

$$R(\mathbf{A}) = \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} - j\omega\sigma\mathbf{A} + \mathbf{J}_s \quad \text{em } S_R \quad (3.61)$$

O método de Galerkin faz com que esse resíduo satisfaça à seguinte integral:

$$\int_{S_R} R(\mathbf{A}) \varphi_n ds = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.62)$$

A equação acima significa que a projeção do resíduo em cada função base é zero, ou o resíduo é ortogonal a todas as funções base. Como existem  $N$  equações integrais definidas em (3.62),  $N$  coeficientes desconhecidos em (3.58) podem ser determinados a partir de (3.62).

As formas das funções base são geralmente simples. Polinômios são os mais comuns, pois podem ser facilmente derivados e integrados.

Com (3.58) e (3.61), a equação (3.62) se torna:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \left( \nabla \cdot \nabla \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) \right) \varphi_m ds - \\
& - \int_{S_R} j\omega\sigma \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) \varphi_m ds + \quad . \quad (3.63) \\
& + \int_{S_R} \mathbf{J}_S \varphi_m ds = 0 \quad (m=1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Green,  $\nabla \cdot (\nu \nabla u) = \nabla \nu \cdot \nabla u + \nu \nabla^2 u$ , o primeiro termo da equação acima se torna:

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) ds + \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left( \varphi_m \nabla \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) \right) ds \\
& = - \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) ds + \int_{\Gamma_0 + \Gamma_1} \frac{1}{\mu} \varphi_m \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial n} + \sum_{n=1}^N a_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) d\Gamma \\
& \quad (m=1, 2, \dots, N) \quad (3.64)
\end{aligned}$$

É mostrado em (Konrad & Silvester, 1973), que as condições de contorno estabelecidas em (3.57) e (3.60) podem ser automaticamente satisfeitas se o segundo loop de integrais na equação acima é nulo. Portanto, uma vez que  $\varphi_n$  é estabelecida, os  $N$  coeficientes desconhecidos podem ser descobertos solucionando-se as equações:

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) ds - \\
& - \int_{S_R} j\omega\sigma \left( \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right) \varphi_m ds + \quad (3.65) \\
& + \int_{S_R} \mathbf{J}_S \varphi_m ds = 0 \\
& (m=1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

É importante notar que a ordem das funções diferenciais presentes na equação (3.65) é uma ordem menor do que a apresentada na equação (3.63).

### 3.2.3 O MEF baseado no método de Galerkin

Com o MEF, o domínio de cálculo é dividido em pequenos elementos (ou sub-regiões), e as funções base são sistematicamente estabelecidas em cada elemento, assim como requer o método de Galerkin para a solução de equações diferenciais. A equação algébrica (3.65) deve ser estabelecida elemento a elemento e as variáveis desconhecidas podem, então, ser calculadas.

O processo que consiste em dividir o domínio de cálculo em pequenos elementos é denominado criação de malha, e a região resultante é chamada de malha de elementos finitos. Todos os vértices dos elementos e locais adicionais, dentro do elemento ou sobre suas arestas, são chamados nós.

Utilizando o método de Galerkin, os valores de campo magnético e elétrico em cada nó se tornam as variáveis desconhecidas na equação (3.58). No cálculo da matriz de impedância  $\mathbf{Z}$ , a variável de campo é  $\mathbf{A}$  e os valores nodais são  $\mathbf{A}(n = 1, 2, \dots, N)$ , com  $N$  sendo o número de nós presentes na malha de elementos finitos, e sua posição definida pelas coordenadas  $(x_n, y_n)$ . As funções de forma  $\varphi_n(n = 1, 2, \dots, N)$  no cálculo de  $\mathbf{Z}$ , satisfazem às seguintes condições:

1.  $\varphi_n$  é contínua dentro do domínio de cálculo,  $S_R$ .  
Portanto, é contínua através de fronteiras entre elementos;

$$2. \quad \varphi_n(x_m, y_m) = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \dots, N)$$

Quando o domínio de cálculo é dividido, as condições de contorno são também discretizadas. O limite do domínio será composto pelas arestas de elementos que estejam na região de fronteira, chamando-se arestas de fronteira, e os nós que estejam sobre o limite do domínio de cálculo serão denominados nós de fronteira. A condição de contorno de Dirichlet é agora representada pelos nós de fronteira em  $\Gamma_0$  com valores especificados. Uma expressão similar pode ser escrita para  $\psi_0$ :

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^{N_B} A_{Bi} \varphi_{Bi} \quad (3.66)$$

Na qual  $A_{Bi}$  representa os valores nodais de fronteira conhecidos na condição de contorno  $\Gamma_0$ .  $\varphi_{Bi}$  representa a correspondente função de forma, a qual possui a mesma característica que  $\varphi_n$ , conforme descrito acima, e  $N_B$  é o número de nós na fronteira contendo as condições de Dirichlet.

Os nós podem ser renumerados de tal forma que os primeiros  $N$  nós são nós com valores desconhecidos, e que  $N_B$  nós possuem a condição de contorno de Dirichlet, onde os valores nodais são conhecidos. Desse modo, o número total de incógnitas é de  $N_T = N + N_B$ . A solução aproximada para  $A$  pode ser escrita como:

$$A = \sum_{n=1}^{N_T} A_n \varphi_n \quad (3.67)$$

Dessa forma, (3.65) e (3.55) tornam-se:

$$\begin{aligned} -\int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \sum_{n=1}^{N_T} A_n \varphi_n ds - \int_{S_R} j\omega \sigma \varphi_m \sum_{n=1}^{N_T} A_n \varphi_n ds + \int_{S_R} \mathbf{J}_s \varphi_m ds = \\ -\sum_{n=1}^{N_T} A_n \int_{S_R} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_n + j\omega \sigma \varphi_m \varphi_n \right) ds + \int_{S_R} \mathbf{J}_s \varphi_m ds \\ (m = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$-j\omega \sum_{n=1}^{N_T} A_n \left( \int_{S_{C_k}} \sigma \varphi_n ds \right) + S_{C_k} \mathbf{J}_{S_k} = \mathbf{I}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (3.69)$$

As equações (3.68) e (3.69) são combinadas para formar a matriz final:

$$\begin{pmatrix} [U] + j\omega[T] & -[F] \\ -j\omega[G_C][F]^T, [F_B]^T & [S_C] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [A] \\ [J_s] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [I] \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Onde:

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \int_{S_R} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_n ds \\ T_{mn} &= \int_{S_R} \sigma \varphi_m \varphi_n ds \\ F_{mk} &= \int_{S_{C_k}} \varphi_m ds \\ F_{B_{lk}} &= \int_{S_{C_k}} \varphi_l ds \\ [G_C] &= \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K] \\ [S_C] &= \text{diag} [S_{C_1}, S_{C_2}, \dots, S_{C_K}] \\ [A] &= [A_1, A_2, \dots, A_{N_T}]^T \\ [J_s] &= [J_{s_1}, J_{s_2}, \dots, J_{s_K}]^T \\ &\begin{pmatrix} m = 1, 2, \dots, N \\ n = 1, 2, \dots, N_T \\ l = N + 1, N + 2, \dots, N_T \\ k = 1, 2, \dots, K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nas matrizes  $[F]$  e  $[F_B]$  somente os nós correspondentes aos condutores possuem valores não nulos, sendo os outros iguais a zero.  $[S_C]$  é a matriz contendo a informação de área dos condutores existentes no sistema.  $[0]$  é um vetor de zeros.  $[G_C]$  é a matriz contendo a informação de condutividade. Assume-se que cada condutor tenha condutividade constante e uniforme em sua secção. Na prática, existe uma matriz como a ilustrada em (3.70) para cada elemento. Isso



significa que todas as integrais em (3.71) tornam-se somas de integrais sobre cada elemento, como:

$$\int_{S_R} = \sum_{i=1}^M \int_{S_{E_i}} \quad (3.72)$$

Onde  $M$  é o número total de elementos na malha de elementos finitos.  $S_{E_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) é a região limitada pelo  $i$ -ésimo elemento.  $S_R = S_{E_1} \cup S_{E_2} \cup \dots \cup S_{E_M}$ , e  $S_{C_k} \in S_R$ . Dentro do  $i$ -ésimo elemento (3.67) torna-se:

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{N_{E_i}} \mathbf{A}_n^{E_i} \varphi_n^{E_i} \quad \text{em} \quad S_{E_i} \quad (3.73)$$

Na qual  $N_{E_i}$  é o número de nós do  $i$ -ésimo elemento,  $\mathbf{A}_n^{E_i}$  é o valor nodal de  $\mathbf{A}$ , e  $\varphi_n^{E_i}$  é a função de forma definida localmente no elemento.  $U_{mn}$  e  $T_{mn}$  tornam-se:

$$\begin{aligned} U_{mn}^{E_i} &= \frac{1}{\mu_{E_i}} \int_{S_{E_i}} \nabla \varphi_m^{E_i} \cdot \nabla \varphi_n^{E_i} ds \\ T_{mn}^{E_i} &= \sigma_{E_i} \int_{S_{E_i}} \varphi_m^{E_i} \varphi_n^{E_i} ds \\ F_{mk}^{E_i} &= \int_{S_{E_i}} \varphi_m^{E_i} ds \quad \text{para elementos condutores} \\ F_{B_{ik}}^{E_i} &= \int_{S_{E_i}} \varphi_l^{E_i} ds \quad \text{para elementos condutores} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Onde  $m = 1, 2, \dots, N_{E_i}$  excluindo-se os nós de fronteira,  $n = 1, 2, \dots, N_{E_i}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_{E_i}$  excluindo-se as variáveis nodais desconhecidas, e  $i = 1, 2, \dots, M$ . Lembrando que nós de fronteira são os nós existentes no limite do domínio de cálculo,  $\Gamma_0$ . As variáveis  $\mu_{E_i}$  e  $\sigma_{E_i}$  são a permeabilidade e a condutividade no  $i$ -ésimo elemento, respectivamente. Um mesmo nó pode ser compartilhado por elementos adjacentes. Quando a montagem de (3.72) é realizada, os elementos que

compartilham um mesmo nó terão contribuição para o nó global compartilhado quando da montagem da matriz global.

Uma vez informada a corrente nos condutores e as condições de contorno, o campo magnético representado pelos valores nodais discretos de  $A$  pode ser encontrado solucionando-se a equação (3.70) e, da solução de campos, a matriz de impedância pode ser calculada.

### **3.2.4 Cálculo da matriz de impedância ( $Z$ ) a partir da solução numérica de campos**

Existem basicamente duas metodologias para o cálculo de impedância a partir da solução numérica de campos: o método  $J_s$  e o método de perdas-energia. Com o método  $J_s$ , a matriz de impedância  $Z$  é calculada diretamente a partir do vetor  $[J_s]$ . Com o método de perdas-energia, as perdas e a energia magnética armazenada são calculadas a partir da solução numérica de campos considerando-se todo o domínio de cálculo.  $[R]$  é calculado a partir das perdas, e  $[L]$  a partir da energia magnética. Os conceitos e aplicações desses dois métodos podem ser encontrados na literatura, porém como o software utilizado para o cálculo de campos é comercial e utiliza o método de perdas-energia, optou-se por concentrar os estudos nesse método.

### **3.2.5 O método de perdas-energia para o cálculo de ( $Z$ )**

Quando a distribuição de campo representada por  $A$  e  $J$  é conhecida, as perdas e a energia magnética armazenadas na forma de campo magnético podem ser calculadas. Esses dois fatores estão diretamente relacionados à resistência e indutância série do sistema. No entanto, geralmente os ditos sistemas são compostos de diversos condutores e as perdas e a energia magnética do sistema como um todo não podem ser utilizadas diretamente para o cálculo dos componentes da matriz  $Z$ . Na sequência, fórmulas para calcular  $Z$  a partir das perdas e da energia magnética são derivadas comparando-se as correspondentes fórmulas com as encontradas em análise de circuitos e com as formulações de campo.

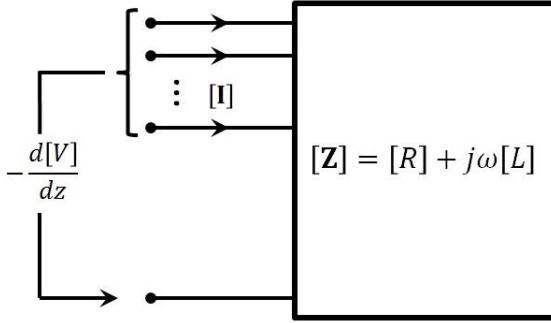


Figura 9 - Circuito equivalente de um sistema resistivo/indutivo.

Fonte: (Yin, 1990)

Para um sistema composto de componentes resistivos e indutivos, como o da Figura 9, a potência complexa entrando nesse sistema pode ser descrita pela seguinte equação:

$$S = P - jQ = \left( -\frac{d[V]}{dz} \right)^{T*} [I] = [I]^{T*} [R][I] - j\omega [I]^{T*} [L][I] \quad (3.75)$$

Onde  $S$ ,  $P$  e  $Q$  são as médias temporais da potência complexa, potência ativa e potência reativa presentes no circuito, respectivamente. E  $I$  é a corrente fasorial circulando no sistema resistivo/indutivo, que pode ser dividida em parte real,  $I_R$  e a parte imaginária,  $I_I$ . Assumindo-se que  $[I] = [I_R] + j[I_I]$  e usando-se do fato que  $P = P^T$  e  $Q = Q^T$ , as seguintes equações podem ser derivadas:

$$P = [I_R]^T [R][I_R] + [I_I]^T [R][I_I] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} \quad (3.76)$$

$$Q = \omega \left( [I_R]^T [L][I_R] + [I_I]^T [L][I_I] \right) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K q_{ij} \quad (3.77)$$

Onde:

$$p_{ij} = R_{ij} \left( I_{R_i} I_{R_j} + I_{I_i} I_{I_j} \right) \quad (3.78)$$

$$q_{ij} = \omega L_{ij} \left( I_{R_i} I_{R_j} + I_{I_i} I_{I_j} \right) \quad (3.79)$$

Onde  $R$  é a resistência total,  $L$  é a indutância total do sistema descrito na Figura 9 e  $K$  é o número total de condutores.

A média temporal de energia magnética  $W_M$  armazenada no sistema na forma de campo magnético é relacionada com  $Q$  por:

$$W_M = \frac{1}{2\omega} Q = \frac{1}{2} \left( [I_R]^T [L] [I_R] + [I_I]^T [L] [I_I] \right) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K w_{M_{ij}} \quad (3.80)$$

$$\text{Onde:} \quad w_{M_{ij}} = \frac{1}{2} L_{ij} \left( I_{R_i} I_{R_j} + I_{I_i} I_{I_j} \right) \quad (3.81)$$

Consequentemente, se  $p_{ij}$  e  $w_{M_{ij}}$  podem ser calculados a partir da solução de campos,  $R_{ij}$  e  $L_{ij}$  podem ser calculados por (3.78) e (3.81), respectivamente.

As fórmulas para calcular a potência média e energia média são:

$$P = \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{\mathbf{J} \mathbf{J}^*}{\sigma} ds \quad (3.82)$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{S_R} \mathbf{B} \mathbf{H}^* ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{Re} \left( \int_{S_{C_k}} \mathbf{A} \mathbf{J}^* ds \right) \quad (3.83)$$

Onde todos os fatores são valores RMS. Essas fórmulas, no entanto, só fornecem os valores de perdas e de energia de maneira global, ou sistêmica. Quando o sistema possui uma combinação arbitrária de condutores carregados com corrente, a densidade de corrente em um dado condutor é causada por todos os condutores presentes no sistema. Dado que o sistema é linear, a densidade de corrente total em um condutor pode ser decomposta em um somatório de diferentes densidades de corrente, induzidas por condutores

diferentes. Assumindo que  $\mathbf{J}_{(k)}$  é a densidade de corrente no k-ésimo condutor, pode-se escrever:

$$\mathbf{J}_k = \sum_{i=1}^K \mathbf{J}_{k_i} \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (3.84)$$

Onde  $\mathbf{J}_{k_i}$  é a densidade de corrente no k-ésimo condutor, induzida pela corrente  $\mathbf{I}_i$ , circulando no i-ésimo condutor. Portanto (3.82) agora se torna:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{\mathbf{J}_k \mathbf{J}_k^*}{\sigma} ds = \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^K \mathbf{J}_{k_i} \sum_{j=1}^K \mathbf{J}_{k_i}^* ds \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mathbf{J}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^* ds = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{\mathbf{J}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^*}{\sigma} ds \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\text{Sendo} \quad p_{ij} = \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{\mathbf{J}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^*}{\sigma} ds \quad (3.86)$$

De forma semelhante:

$$\begin{aligned} W_M &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{Re} \left( \int_{S_{C_k}} \mathbf{A}_k \mathbf{J}_k^* ds \right) \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{Re} \left( \int_{S_{C_k}} \mathbf{A}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^* ds \right) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K w_{Mij} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\text{Sendo:} \quad w_{Mij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{Re} \left( \int_{S_{C_k}} \mathbf{A}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^* ds \right) \quad (3.88)$$

Onde  $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^K \mathbf{A}_{k_i}$ , e  $\mathbf{A}_{k_i}$  é  $\mathbf{A}$  no k-ésimo condutor causado pela corrente  $\mathbf{I}_i$ . Relacionando-se as equações (3.86) e (3.88) com

(3.78) e (3.81), respectivamente, é possível escrever as equações para  $R_{ij}$  e  $L_{ij}$  :

$$R_{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^K \int_{S_{C_k}} \frac{\mathbf{J}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^*}{\sigma} ds \right\} / \left( I_{R_i} I_{R_j} + I_{I_i} I_{I_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, K) \quad (3.89)$$

$$L_{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^K \mathbf{Re} \left( \int_{S_{C_k}} \mathbf{A}_{k_i} \mathbf{J}_{k_j}^* ds \right) \right\} / \left( I_{R_i} I_{R_j} + I_{I_i} I_{I_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, K) \quad (3.90)$$

Para obter  $\mathbf{J}_{k_i}$  e  $\mathbf{A}_{k_i}$  ( $k, i = 1, 2, \dots, K$ ), a equação (3.70) do sistema deve também ser solucionada  $K$  vezes, com somente um condutor excitado em corrente por vez.

Como detalhado, o método para calcular a matriz  $\mathbf{Z}$  baseado na potência e na energia necessita informações de campo em todo o domínio de cálculo, incluindo os condutores.

### 3.3 O SOFTWARE ANSYS MAXWELL

O software ANSYS Maxwell, comumente referenciado como Maxwell, é um simulador de campos eletromagnéticos que permite realizar simulações em ambientes bi e tridimensionais. É muito difundido na indústria de dispositivos eletromecânicos, incluindo motores, atuadores, transformadores, sensores, entre outros. O Maxwell é baseado no MEF e pode ser utilizado para calcular precisamente campos elétricos e magnéticos, estáticos, transientes e também aqueles aproximados pelo regime harmônico.

Esse software foi desenvolvido pela empresa americana ANSOFT, em 1984 quando seu fundador Dr. Zoltan Cendes criou, juntamente com alguns colegas da Universidade Carnegie Mellon de Pittsburgh onde era professor, um *solver* que atrelado ao método dos elementos finitos resolvia problemas de correntes parasitas em condutores de corrente elétrica. Ao longo dos anos 90 e 2000, a ANSOFT cresceu e agregou outros *solvers* para esse software, além de criar outros pacotes para simular campos em altas frequências. Em 2009, a ANSOFT foi comprada pela também americana ANSYS, conhecida por usar o MEF para resolver problemas mecânicos e térmicos.

Considerando-se que hoje o software em questão é genérico, do ponto de vista que pode ser utilizado para simular uma infinidade de dispositivos eletromagnéticos, sugere-se também que seja possível utilizá-lo para solucionar os campos magnéticos e elétricos existentes em estruturas de cabos umbilicais. Como o interesse é obter as matrizes de impedância de um sistema multicondutor em função da frequência, o *solver* mais adequado para este objetivo é o *Eddy Current Solver*. Algumas limitações do mesmo são:

- Não há movimento de objetos;
- Ímãs permanentes não podem ser usados como fonte de campo;
- Todos os materiais são supostos lineares.

Esse *solver* é baseado no fato de que todos os campos eletromagnéticos pulsam numa mesma frequência, sendo essa especificada pelo usuário, e possuem magnitude e fase calculadas pelo software. É muito usado no cálculo de perdas em objetos condutores devido à possibilidade de calcular as correntes parasitas existentes em estruturas expostas a campos magnéticos variantes no tempo. O *solver* calcula as correntes induzidas a partir do vetor potencial magnético,  $\mathbf{A}$ , e do escalar potencial elétrico,  $\phi$ , através da seguinte relação:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) = (\sigma + j\omega\epsilon)(-j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi) + \mathbf{J}_s \quad (3.91)$$

Onde:

- $\mu$  é a permeabilidade magnética absoluta;
- $\omega$  é a frequência angular;
- $\sigma$  é a condutividade;
- $\epsilon$  é a permissividade absoluta.

O ANSYS Maxwell considera o termo referente à densidade de corrente de deslocamento, que no domínio da frequência é representada pelo termo  $j\omega\epsilon\mathbf{E}$ , onde  $\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$ . A diferença entre (3.52) e (3.91) é que o termo  $\sigma$  em (3.52) é o termo  $(\sigma + j\omega\epsilon)$  em (3.91) e para (3.52) a corrente é definida como  $\mathbf{J}_s = -\sigma\nabla\phi$ .

Nesse *solver* é possível usar fonte de campo do tipo corrente e densidade de corrente. E, também, campos magnéticos externos variantes no tempo, sendo representados através de condições de contorno aplicadas no limite do domínio de cálculo.

Em relação às condições de contorno para casos bidimensionais, existem várias disponíveis, a saber:

1. **Vetor Potencial:** usada para especificar o valor de  $A_z$ , ou seja, o vetor potencial magnético na direção Z, conhecida também por condição de Dirichlet. Para casos harmônicos, essa condição de contorno é expressa como:

$$A_z(t) = A_m \cos(\omega t + \theta) \quad (3.92)$$

Sendo, portanto, necessário especificar a amplitude e fase de  $A_z$ .

2. **Impedância:** esse tipo de condição de contorno permite simular os efeitos de correntes induzidas em um condutor, sem explicitamente calculá-las. As perdas ôhmicas devido às correntes induzidas são calculadas a partir da componente tangencial de campo em relação à fronteira onde essa condição de contorno é especificada.
3. **Simetria:** essa condição de contorno é usada para tirar vantagem sobre a simetria geométrica e eletromagnética de dadas estruturas, reduzindo assim o tamanho do modelo e tempo computacional. É possível ainda especificar simetria par e ímpar.
4. **Ballon:** esse tipo de condição de contorno emula que os campos a partir da fronteira vão para o infinito. Ou seja, a componente  $A_z$  tende a zero no infinito, deixando-se livre o valor dessa componente sobre a fronteira onde é usada essa condição de contorno.
5. **Master/Slave:** muito usada para análise de motores elétricos, essa condição de contorno é vantajosa em casos onde existe uma simetria periódica na estrutura analisada. Além da periodicidade geométrica, é também necessário que exista periodicidade de campo magnético.

Para o tipo de estrutura em estudo, isto é, cabos umbilicais, usa-se basicamente o ambiente bidimensional com a geometria definida sobre o plano cartesiano, com excitações do tipo corrente, e condição de contorno Ballon aplicada a uma região externa distante do cabo umbilical. As etapas envolvidas na simulação, tanto para um cabo umbilical quanto qualquer outro dispositivo, segue basicamente a mesma sequência, a qual pode ser resumida através da Figura 10. A Figura 11 mostra uma janela de interface com o usuário do software ANSYS Maxwell.



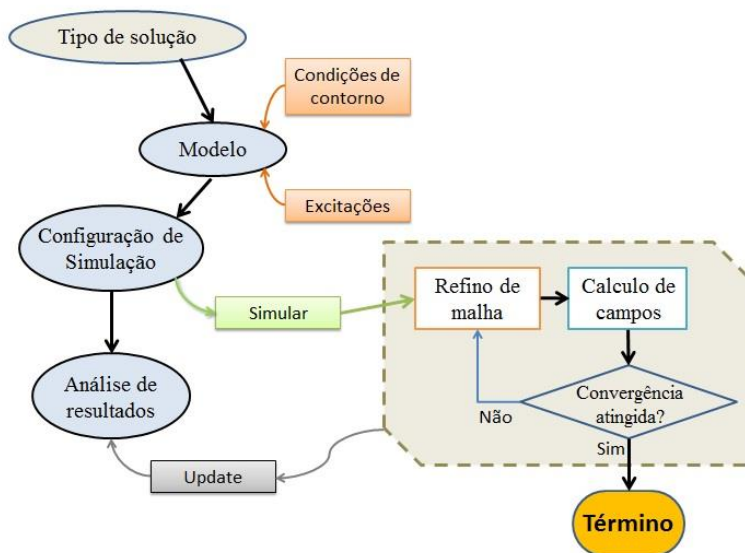


Figura 10 - Fluxograma do processo de solução.

Fonte: (ANSYS Inc., 2012)

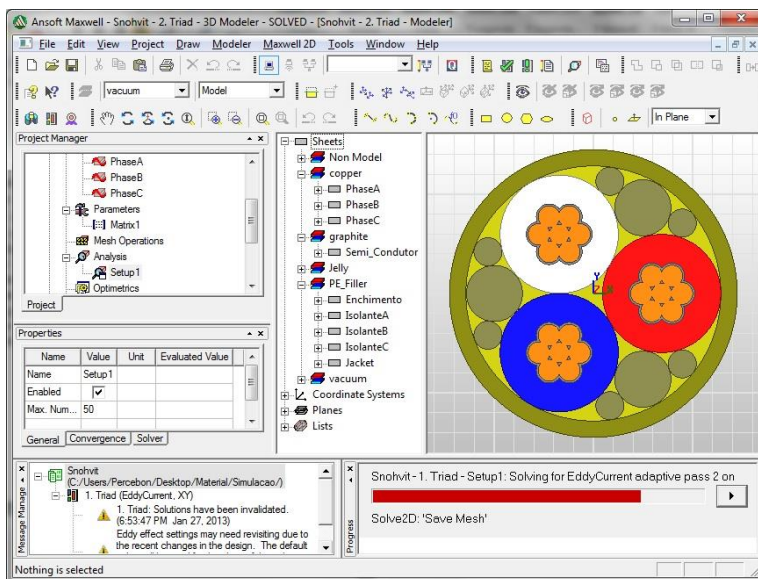


Figura 11 - Interface com usuário do software ANSYS Maxwell.

Sendo esse software dito “comercial”, seu ambiente é bastante amigável, sendo responsável por todo o processo de simulação, isto é, as fases de pré-processamento, cálculo e pós-processamento são todos realizados em um mesmo ambiente.

O pré-processamento é definido como uma etapa primária em uma simulação. É o estágio no qual são definidas as condições de contorno, fontes de campo, definição de geometria e materiais associados, configuração da simulação, etc. O ambiente disponibiliza a possibilidade de importação de geometria em diversos formatos, ou uma paleta de ferramentas que permite a criação da geometria a ser analisada. Em relação aos materiais, existe uma biblioteca pré-definida, sendo possível a criação ou importação de novos materiais. Deve-se também, nesse estágio, definir quais objetos condutores devem ser considerados condutores de corrente elétrica, quais objetos devem ter as correntes parasitas consideradas e quais devem fazer parte do cálculo de impedância.

O processamento propriamente dito não é visto diretamente pelo usuário. O processo de malha adaptativa é baseado no balanço energético do domínio de cálculo, ou seja, é feita uma comparação entre a quantidade de energia que está entrando no domínio, na forma de corrente elétrica, e quanto está sendo calculado a partir da intensidade de campo magnético. Faz-se então uma comparação entre esses dois valores; o erro entre eles é definido como o critério de convergência por energia e tem como *default* o valor de 1%. É possível utilizar outras quantidades como parâmetros para a convergência do processo iterativo, como por exemplo, valores pontuais de campo, perdas e também os valores da matriz de impedância.

Durante o processo de simulação, isto é, cálculo dos valores de campo, forças, torque, matrizes de impedância, o usuário pode apenas acompanhar a evolução da simulação, tais como a convergência do processo adaptativo de criação de malha, evolução dos resultados, memória e processadores utilizados, tempo gasto em cada etapa, entre outros.

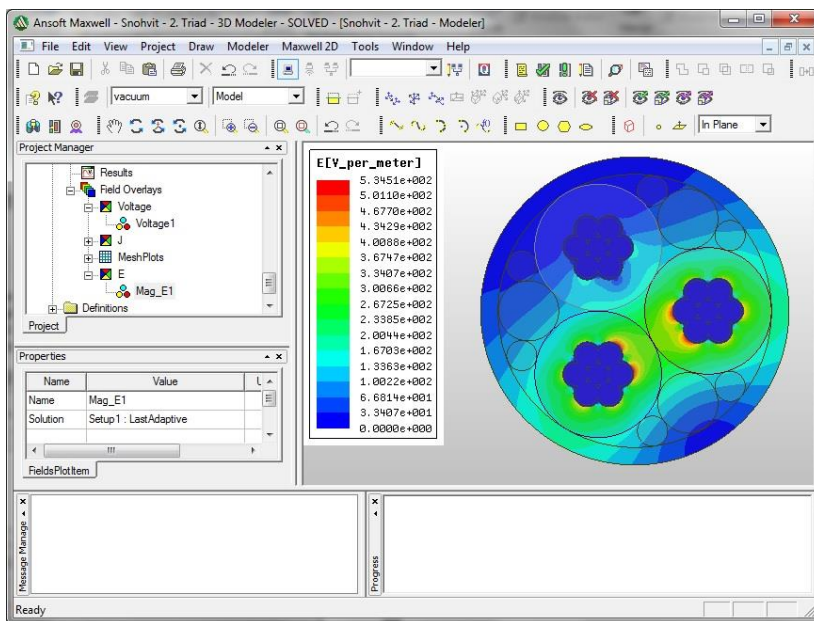


Figura 12 - Etapa de pós-processamento, visualização de campo elétrico.

O pós-processamento também é realizado no ambiente mostrado na Figura 12, no qual é possível visualizar a carta de campos, mostrando-se a intensidade de campo magnético, campo elétrico, densidade de corrente, densidade de perdas, entre outros. Existe, ainda, uma calculadora interna que pode ser usada para definir quantidades não usuais como a quantidade de fluxo magnético atravessando um determinado objeto.

Em relação aos métodos utilizados pelo software para o cálculo das matrizes de impedância série e transversal, o ANSYS Maxwell utiliza os mesmos princípios descritos na seção anterior, ou seja, o método de perdas-energia.



## 4 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a implementação das metodologias descritas no capítulo anterior. Primeiramente, são expostas as análises realizadas com as sequências de cálculos analíticos e, posteriormente as análises realizadas utilizando um software baseado no método de elementos finitos.

Para a comparação de resultados, foram utilizados tipos de cabos mais simples com o intuito de validar a metodologia numérica de ambos os casos. Os resultados apresentados são válidos para um espectro de frequência bastante amplo, partindo de corrente contínua (CC) até a faixa de 100 kHz, muito além das frequências nominais utilizadas em cabos umbilicais. Considerando que os cabos umbilicais são geralmente mistos, isto é, compostos de cabos elétricos para a transferência de dados e potência elétrica, é interessante analisar e obter as matrizes de impedância para um amplo espectro de frequência. Isso permite considerar a dinâmica de funcionamento do umbilical em questão para o conteúdo harmônico presente nos condutores, bem como o efeito pelicular mais acentuado observado nas altas frequências.

### 4.1 CABO COAXIAL

Para, inicialmente, validar tanto a metodologia analítica quanto a formulação e metodologia usada no MEF, um cabo coaxial simples foi objeto de estudo. Considerando-se que o cabo coaxial é a unidade básica de qualquer cabo umbilical, sugere-se que a metodologia aplicada pode ser estendida também para cabos com geometria e funcionamento mais complexos. Essa hipótese foi confirmada posteriormente considerando-se os resultados de medições realizadas em campo.

O cabo coaxial utilizado nesse estudo inicial é composto por basicamente três elementos: o condutor central ou núcleo, o isolante interno e a blindagem. A Figura 13 mostra a seção circular do cabo coaxial e também as relativas propriedades eletromagnéticas necessárias para analisá-lo. Os raios internos de cada elemento,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são, respectivamente, 5mm, 10mm e 12mm. As propriedades eletromagnéticas do núcleo são  $\mu_{r1} = 1$ , e  $\sigma_1 = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ , da blindagem:  $\mu_{r2} = 10$ , e  $\sigma_2 = 1 \times 10^7 \text{ S/m}$ , e do isolante:  $\epsilon_r = 1$ .

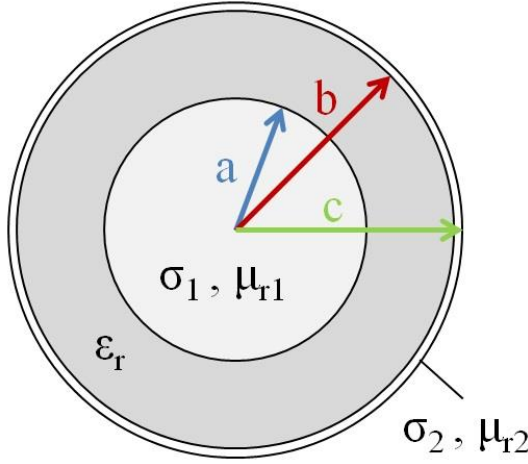


Figura 13 - Cabo coaxial utilizado como exemplo para cálculo.

#### 4.1.1 Metodologia analítica

Partindo do equacionamento descrito na secção 3.1.1, pode-se simplificar para o caso nos quais existem somente dois elementos condutores, ou seja, anular os termos referentes à existência de uma armadura.

Partindo-se das equações para a impedância interna do núcleo, (3.23), impedância do isolante externo ao núcleo, (3.24) e da impedância interna da superfície da bainha, é possível calcular a impedância do cabo apresentado na Figura 13.

Portanto, pode-se escrever que a impedância série para o cabo composto por núcleo, isolante e bainha é:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_{out1} + \mathbf{Z}_{ext} + \mathbf{Z}_{in2} \quad (3.93)$$

Onde:

$$\mathbf{Z}_{out1} = \mathbf{Z}_{2i} = \frac{m_1 I_0 (m_1 a)}{2\pi a \sigma_1 I_1(m_1 a)} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{Z}_{ext} = \mathbf{Z}_{12} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.95)$$

$$Z_{in2} = Z_{11} = \frac{m_2}{2\pi c\sigma_2} \frac{(I_0(m_2c)K_1(m_2b) + K_0(m_2c)I_1(m_2b))}{(I_1(m_2c)K_1(m_2b) - K_1(m_2c)I_1(m_2b))} \quad (3.96)$$

$$m_i = \sqrt{j\omega\mu_{ri}\mu_0\sigma_i} \quad (3.97)$$

Lembrando que  $I$  e  $K$  denotam as equações modificadas de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Os sub-índices das notações  $I$  e  $K$  indicam a ordem da função de Bessel.

O equacionamento descrito pelas equações (3.93) a (3.96) foi implementado através de rotinas computacionais utilizando o software Matlab R2011b, e pode ser lido com maior detalhe no ANEXO A.

Para o cabo em questão, tais rotinas computacionais resultaram nos valores apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados analíticos de resistência e indutância para o cabo coaxial.

<i>Frequência (Hz)</i>	<i>R (Ω/km)</i>	<i>L (mH/km)</i>
10	0,943	0,321
20	0,943	0,321
35	0,943	0,321
100	0,946	0,321
200	0,955	0,320
450	0,999	0,317
1 kHz	1,175	0,303
2 kHz	1,582	0,277
5 kHz	2,568	0,229
10 kHz	3,581	0,202
20 kHz	5,014	0,184
50 kHz	7,861	0,167
100 kHz	11,071	0,159

#### 4.1.2 Metodologia numérica

Considerando o exposto na secção 3.3, o cabo coaxial utilizado como teste foi modelado no software baseado no método de elementos finitos, ANSYS Maxwell, versão 15.

O primeiro passo da modelagem é a criação da geometria que, para o presente caso de estudo, é simplesmente, do ponto de vista de modelagem, um conjunto de círculos concêntricos. A geração desses círculos é bastante simples: utiliza-se o comando de criação de círculos, no qual é especificado o ponto que define o centro do círculo e, a seguir, o raio do mesmo. Outros atributos também podem ser alterados após a criação do objeto, entre elas cita-se a cor, nome, o sistema de coordenadas ao qual o objeto é referenciado, além da definição de material. Tal procedimento é repetido para os três círculos que, ao final, constituem o cabo coaxial usado para validação dos resultados. Os materiais utilizados no cabo possuem os mesmos materiais especificados na seção 4.1. Isso é possível inserindo-se novos materiais na biblioteca de matérias já existente.

Considerando o exposto no capítulo que descreve o MEF, é necessário criar uma região que limite o cálculo de elementos finitos. Isso é feito criando-se um quarto objeto, que pode ser definido usando-se uma geometria qualquer. Ao analisar cabos, é usual criar um polígono de várias arestas ou apenas outro círculo concêntrico ao cabo sob análise. O tamanho da região pode impactar os resultados da simulação dependendo da condição de contorno utilizada. Comumente utiliza-se a condição do tipo *Ballon*, anteriormente descrita, na qual o potencial vetor magnético é livre sobre a borda do domínio de cálculo. Para o caso em questão, foi utilizado um círculo com aproximadamente seis vezes o tamanho do raio da blindagem.

O terceiro passo da modelagem é a definição dos condutores de corrente, ou seja, deve-se indicar ao software quais objetos são considerados ativos. Isso é feito selecionando o objeto condutor, ou grupo de objetos condutores, e utilizar o comando de atribuir uma excitação. Para esse caso foi utilizada a excitação do tipo “corrente”, na qual se especifica a amplitude e fase da onda senoidal. Além dessas, deve-se também indicar o sentido da corrente, isto é, se ela está entrando ou saindo do plano. Para o caso do cabo coaxial, foram indicadas duas excitações, uma para o núcleo e outra para a blindagem, que efetivamente é o caminho de retorno da corrente que circula pelo núcleo. Porém, para que o cálculo da matriz de impedância seja realizado, não basta definir os objetos condutores de corrente; também é necessário especificar quais excitações devem fazer parte da matriz, e ainda, seu arranjo, isto é, a maneira com que estão conectados. Para o cabo coaxial, foi configurado que seja calculado a impedância do núcleo, no qual o caminho de retorno é dado pela blindagem. A Figura 14 mostra o



ambiente no qual é definida a matriz e a relação entre as excitações existentes no modelo.

Uma vez criados os objetos da análise, seus materiais, excitações e a definição da matriz de impedância, pode-se iniciar a configuração do processamento. Nessa etapa são definidos critérios de convergência, porcentagem de erro relativo, frequência nominal de análise, intervalo de frequências, entre outros. Para a realização dessa simulação, foi utilizada, além do critério *default* de convergência por energia, a convergência pelos valores de resistência e indutância da matriz de impedância do cabo, especificadas em 1%. Dessa maneira força-se que a convergência se dê também pelos valores da impedância, foco deste estudo.

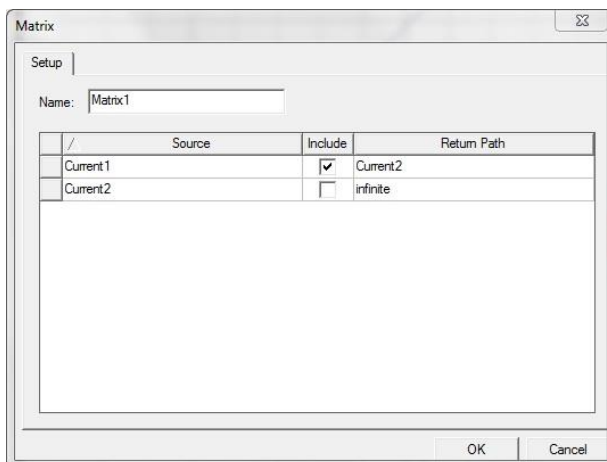


Figura 14 - Ambiente para definição da matriz de impedância.

Com essas definições realizadas, pode-se partir para o processamento. O ANSYS Maxwell, antes de efetivamente simular o caso em questão faz uma checagem de diversos itens para assegurar a correta modelagem. No caso do cabo coaxial, a simulação demorou cerca de 2 minutos para realizar uma varredura em frequência de 10 a 50 kHz, considerando 13 pontos de amostra, conforme a coluna 1 da Tabela 2.

A malha de elementos finitos final contém em torno de 11 mil elementos. A Figura 15 mostra o zoom da malha nas redondezas do cabo coaxial. Pode-se observar que as regiões onde existe uma concentração maior de elementos são justamente onde existe uma densidade mais elevada de energia na forma de campo magnético. Vale

ressaltar que a mesma malha foi utilizada para o cálculo em todos os valores de frequência considerados

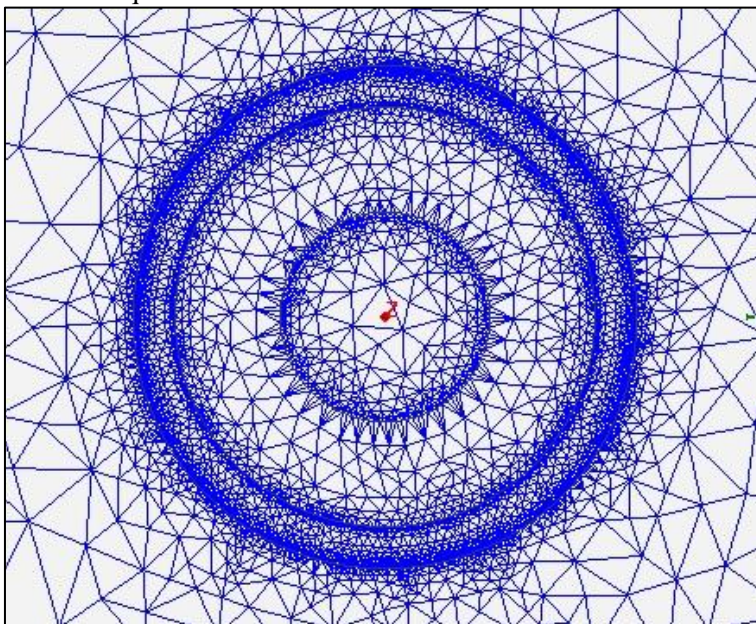
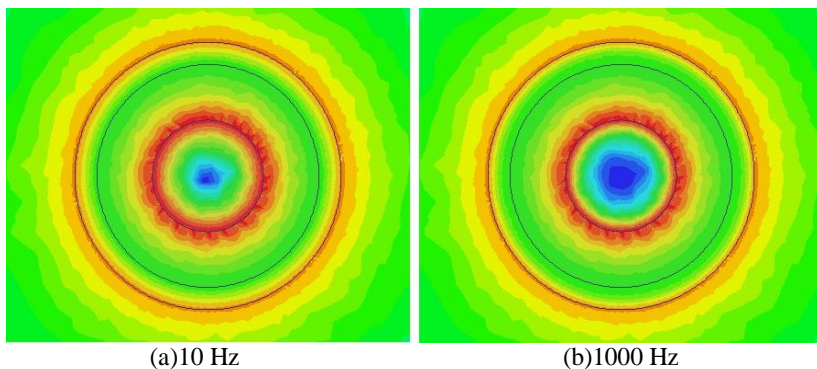


Figura 15 – Zoom da malha final para o cabo coaxial.

Outro tipo de pós-processamento que pode ser realizado diretamente no ambiente do software é a carta de campos magnéticos. A Figura 16 apresenta quatro exemplos de campo magnético para algumas das frequências analisadas.



(a)10 Hz

(b)1000 Hz

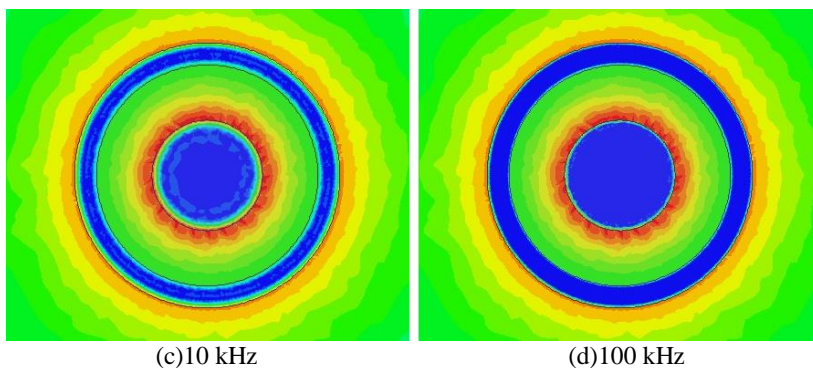


Figura 16 – Cartas de campo magnético para o cabo coaxial nas frequências (a) 10 Hz, (b) 1000 Hz, (c) 10 kHz e (d) 100 kHz

A Tabela 3 resume os valores de resistência e indutância calculados com o software baseado no MEF.

Tabela 3 - Resultado de resistência e indutância para o cabo coaxial.

<i>Frequência (Hz)</i>	<i>R (<math>\Omega/km</math>)</i>	<i>L (mH/km)</i>
10	0,943	0,321
20	0,944	0,321
35	0,944	0,321
100	0,947	0,321
200	0,956	0,320
450	1,006	0,317
1 kHz	1,202	0,303
2 kHz	1,667	0,277
5 kHz	2,808	0,229
10 kHz	3,974	0,202
20 kHz	5,621	0,184
50 kHz	8,895	0,167
100 kHz	12,594	0,159

#### 4.1.3 Comparação de resultados para o cabo coaxial

Como dito anteriormente, esse caso de estudo tem por objetivo validar as metodologias numérica e analítica para o cálculo da matriz de impedância série de cabos umbilicais.

Considerando uma variação de frequência significativa, isto é, partindo de baixas frequências até a ordem de centena de quilohertz,

pode-se observar o comportamento da resistência e da indutância em função desse parâmetro, possibilitando dimensionar o sistema no qual o cabo está inserido. A Figura 17 e a Figura 18 mostram gráficos nos quais são expostos os valores calculados pela metodologia analítica e pelo método de elementos finitos.

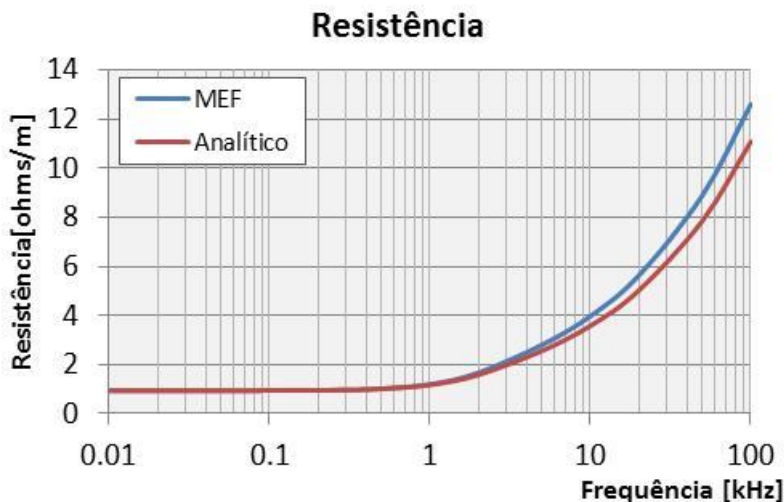


Figura 17 - Comparação entre resultados para resistência em Ohms/metro.

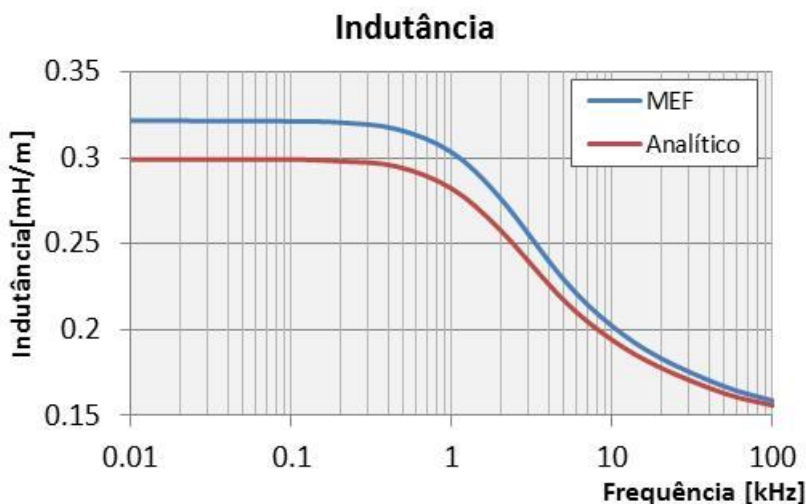


Figura 18 - Comparação entre resultados de indutância em mH/metro.

Conforme pode ser observado nos resultados, existe diferença entre os valores calculados com os dois métodos utilizados. A resistência apresenta diferenças mais significativas, maiores que 10%, a partir dos 10 kHz, enquanto que a indutância apresenta comportamento contrário, mostrando diferenças maiores nas baixas frequências, porém não ultrapassando 8% em toda a faixa de frequência analisada.

O gráfico da Figura 19 apresenta os erros percentuais para a resistência e indutância do cabo *Single Core* analisado.

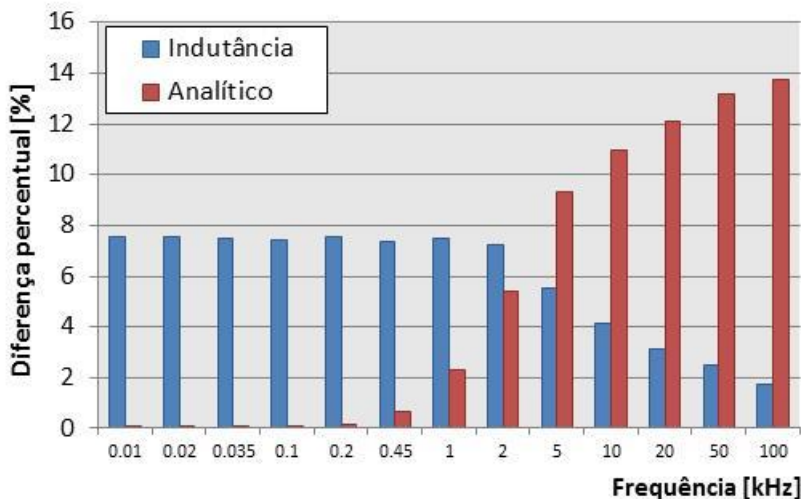


Figura 19 - Diferença percentual entre valores calculados.

## 4.2 UMBILICAL DE CONTROLE DE SNØHVIT

O umbilical de Snøhvit conecta o reservatório de gás no mar de Barents com a planta de tratamento de gás Melkøya, situada na cidade Norueguesa de Hammerfest. O cabo possui comprimento de 144 km, é constituído de dois conjuntos trifásicos de 3 kV e de um par de fibras-ópticas para transmissão de sinais (Statoil Inc., 2005). Além desses componentes elétricos, o cabo ainda contempla quatro mangueiras hidráulicas e o conjunto final é envolto por uma armadura de aço. A Figura 20 ilustra o cabo umbilical em questão.

Esse cabo umbilical foi usado como objeto de estudo de (Gustavsen, Bruaset, Bremnes, & Hassel, 2009), no qual são apresentados resultados de medição da resistência, indutância e capacitância.

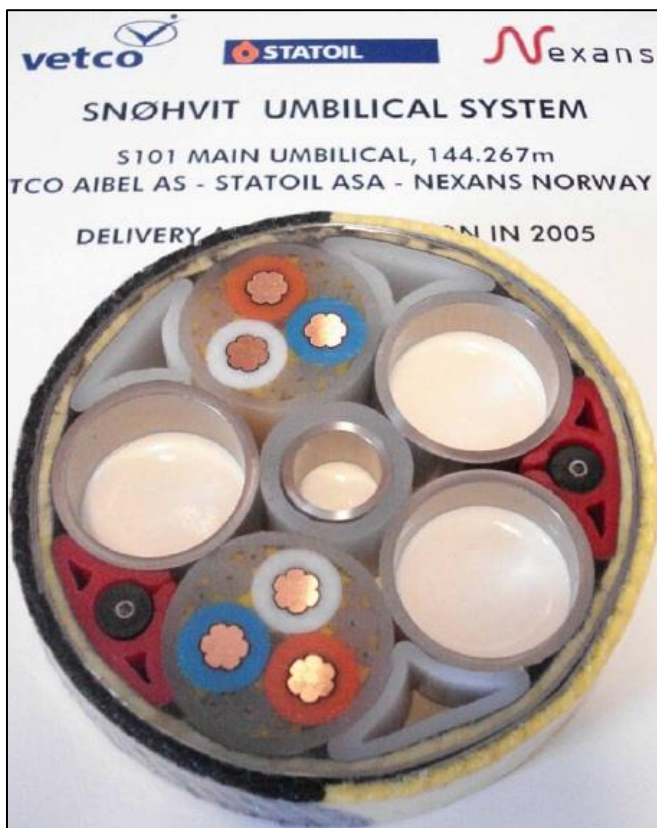


Figura 20 - IPU usado na reserva de Snøhvit.

Fonte: (Gustavsen, 2009)

#### 4.2.1 Modelagem do trifólio de potência

Antes de simular e obter resultados para o cabo umbilical como um todo, procede-se para a modelagem e simulação somente do trifólio de potência, considerando-se que são fornecidos também resultados de medições para essa situação.

Cada um dos condutores presentes no trifólio de potência possui secção total de  $25 \text{ mm}^2$ , sendo constituídos de sete condutores sólidos, que são mostrados na Figura 21, levemente compactados em seu formato final. Sobre os condutores de cobre, é aplicada uma camada semicondutora de grafite. O conjunto é envolvido por isolante de polietileno e os espaços vazios preenchidos com geleia de petróleo.



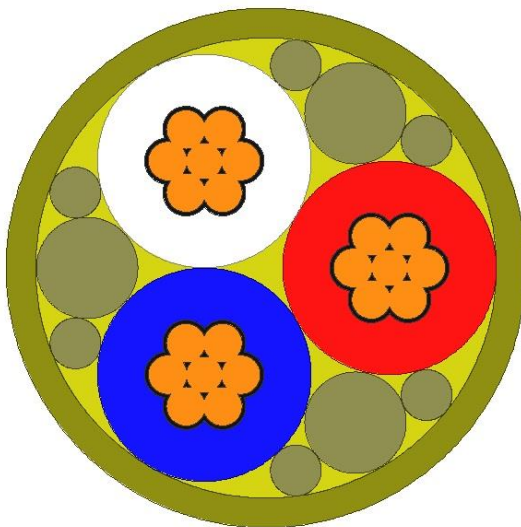


Figura 21 - Trifólio de potência do IPU de Snøhvit.

O procedimento para medição da impedância série é bastante complexo. Para o cabo em questão, foi utilizado um trecho de 273 m de comprimento mergulhado em água do mar. Em uma das extremidades foram curto-circuitadas duas fases e na outra foi inserida uma fonte de corrente controlada, para efetuar a medição da corrente e tensão entre os terminais das fases. Alguns dados referentes ao trifólio de potência podem ser observados na Tabela 4.

Tabela 4 - Propriedades dimensionais do IPU de Snøhvit.

	<i>Diâmetro [mm]</i>	<i>Espessura [mm]</i>	<i>Permissividade relativa</i>
Núcleo	6,1	-	1
Semicondutor	-	0,27	1
Geleia	-	-	2,5
Isolamento	-	2,63	2,3
Jaqueta externa	-	1,64	2,3

O núcleo é constituído de cobre, com uma condutividade de  $5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$  e a camada semicondutora possui condutividade de  $7 \times 10^3 \text{ S/m}$ . Todos os materiais envolvidos possuem permeabilidade

relativa unitária. Os resultados de medição e da simulação são expostos na Tabela 5.

#### 4.2.2 Modelagem do IPU de Snøhvit.

Uma vez modelado e simulado o trifólio de potência, pode-se modelar o cabo umbilical inteiro, incluindo os 4 tubos hidráulicos de aço ( $\mu_r = 200$ ,  $\sigma = 1,25 \times 10^6$  S/m), o par de fibras óticas, e a armadura externa também feita de aço ( $\mu_r = 20$ ,  $\sigma = 5 \times 10^6$  S/m) (Gustavsen, Bruaset, Bremnes, & Hassel, 2009).

Os objetos com permeabilidade relativa unitária, isto é, os enchimentos e isolantes elétricos, foram desconsiderados para a análise de impedâncias série, pelo fato de não interferirem na análise magnética. A geometria usada na simulação é mostrada na Figura 24 e a malha de elementos finitos, contendo pouco mais de 40 mil elementos, pode ser vista na Figura 25.

Tabela 5 - Comparação de resultados medidos e simulados.

	<i>Trifólio</i>		<i>Umbilical</i>	
	Medida	Simulada(MEF)	Medida	Simulada(MEF)
R @ 50 Hz	1,3	1,37	1,3	1,37
1 kHz	1,5	1,55	1,6	1,70
3 kHz	2,2	2,25	2,7	2,71
6 kHz	3,1	3,17	4,2	4,05
10.1 kHz	4,0	4,14	5,7	5,59
L @ 50 Hz	0,67	0,66	0,73	0,72
1 kHz	0,67	0,65	0,71	0,69
3 kHz	0,63	0,62	0,66	0,64
6 kHz	0,60	0,59	0,62	0,60
10.1 kHz	0,59	0,57	0,59	0,57

A Tabela 5 mostra os resultados obtidos na medição e simulação realizados com o cabo umbilical completo de Snøhvit.



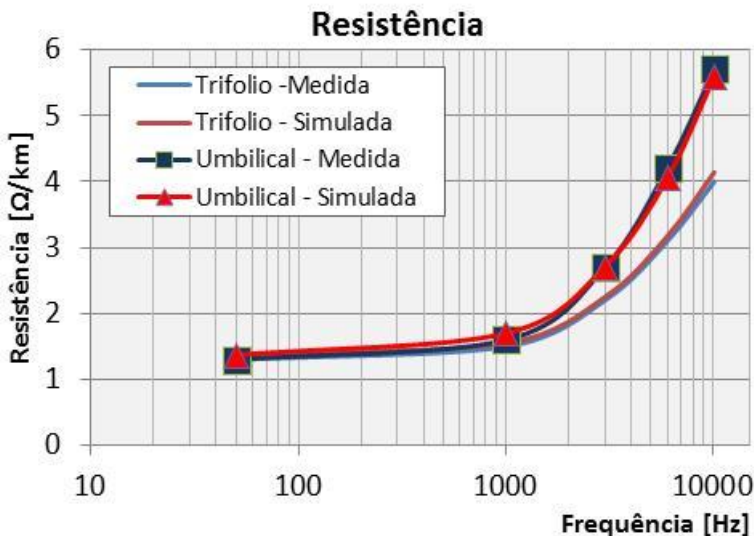


Figura 22 - Comparação de resultados para a resistência do trifólio de potência e do umbilical de Snøhvit.

A partir da Tabela 5 derivam-se duas séries de resultados. Na Figura 22 - Comparação de resultados para a resistência do trifólio de potência e do umbilical de Snøhvit. Figura 22 são apresentados de forma gráfica os valores para a resistência por quilometro obtidos através da modelagem com o MEF e comparados com os valores obtidos através de medições. Ambas as situações são comparadas, isto é, o caso onde somente o trifólio é considerado e também o caso do umbilical completo. De forma semelhante a Figura 23 apresenta a comparação para os valores de indutância por quilometro.

Os procedimentos para a medição foram os mesmos aplicados no caso em que somente o trifólio de potência foi medido. Em outras palavras, submergir um trecho do cabo umbilical (300 m) em água do mar, curto-circuitar duas fases em uma das extremidades do cabo e injetar corrente na outra extremidade.

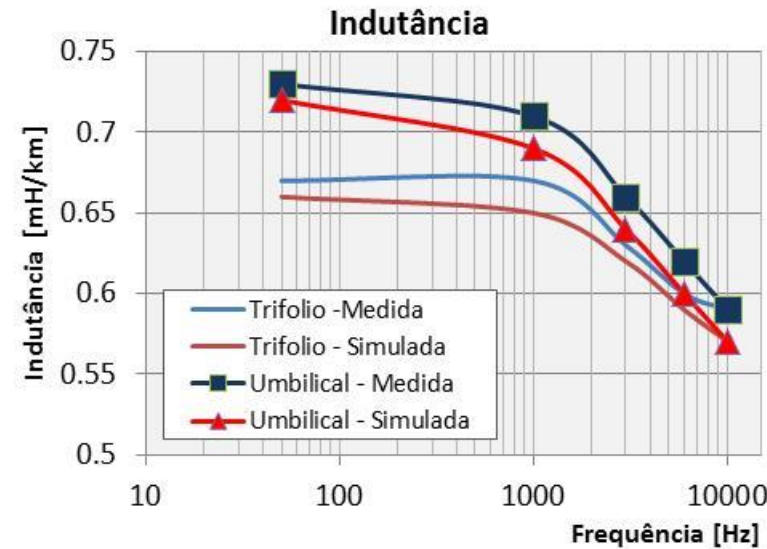


Figura 23 - Comparação de resultados para a resistência do trifólio de potência e do umbilical de Snøhvit.

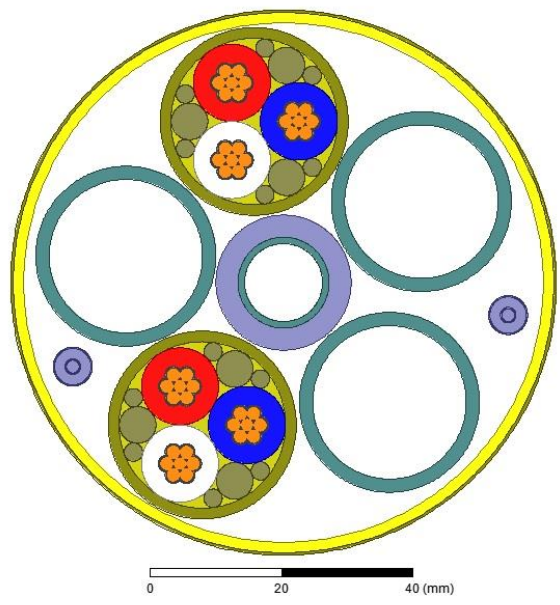


Figura 24 - Geometria do IPU de Snøhvit.

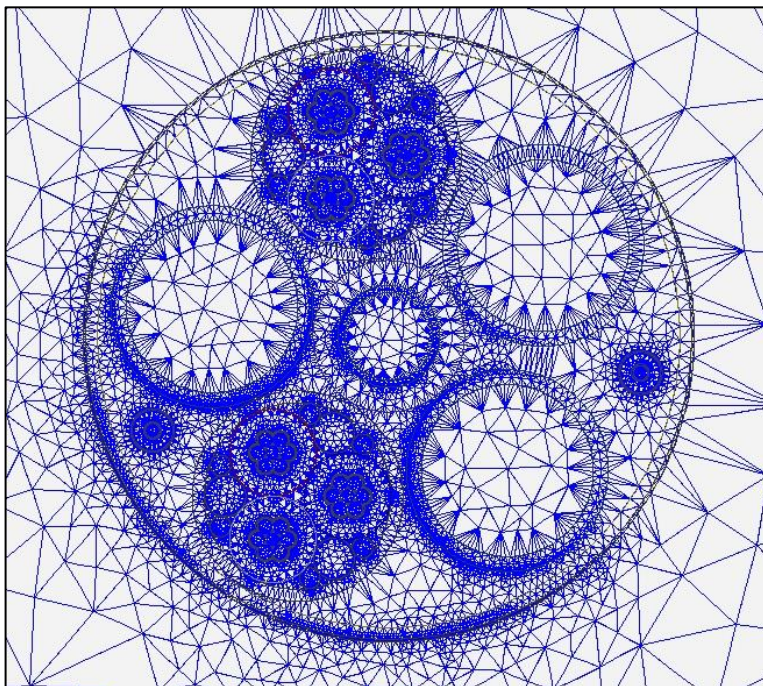


Figura 25 – Zoom da malha de elementos finitos para o IPU de Snøhvit.

As linhas de fluxo magnético podem ser observadas na Figura 26. A Figura 27 e a Figura 28 mostram a comparação entre as diferenças percentuais dos valores medidos e simulados para ambas as situações: o trifólio e o umbilical completo. Novamente, bons resultados são atingidos. Conforme pode ser observado, existe pouca diferença entre os valores considerados, todos abaixo de 6% de diferença.

Além dos erros relacionados ao processo de medição, a causa da diferença entre os valores pode ser relacionada a erros de valores considerados para as propriedades dos materiais como, por exemplo, a permeabilidade e a condutividade. Outra possível fonte para as diferenças encontradas é o formato dos condutores de potência. No cabo real, o processo de fabricação que compacta os condutores de cobre, acaba por deformar a secção resultante. Isso pode acarretar em erros principalmente por deformar a distribuição de corrente em altas frequências devido ao efeito pelicular.

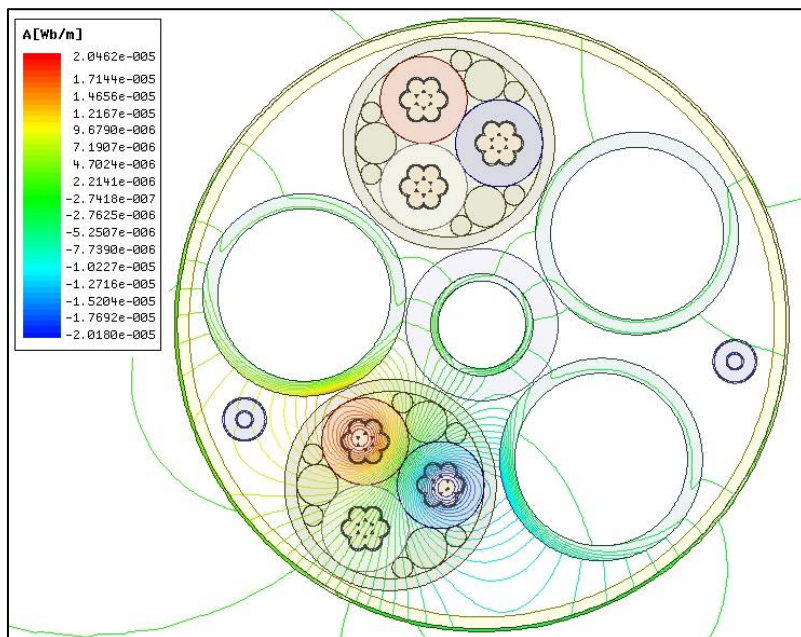


Figura 26 - Linhas de fluxo magnético.

Existe ainda a questão do trançamento dos cabos. É indicado em (Gustavsen, Bruaset, Bremnes, & Hassel, 2009) que este cabo umbilical possua os trifólios de potência trançados sobre seus eixos centrais. Isso pode interferir nos resultados finais.

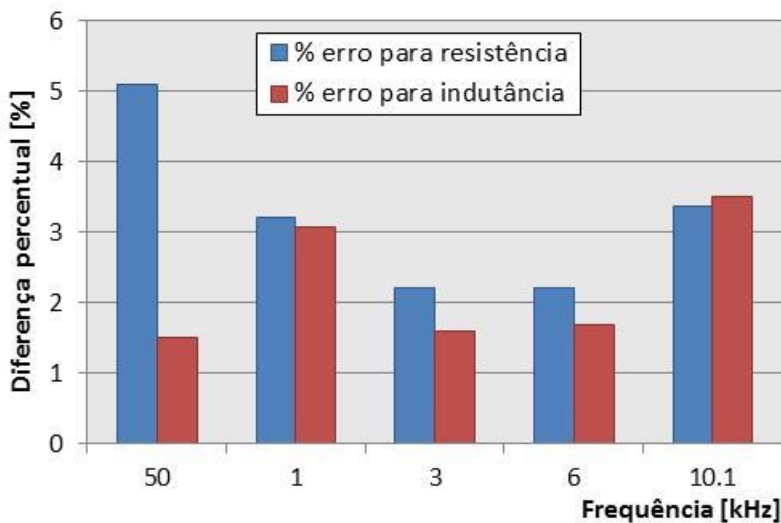


Figura 27 - Resultados para o trifólio de potência.

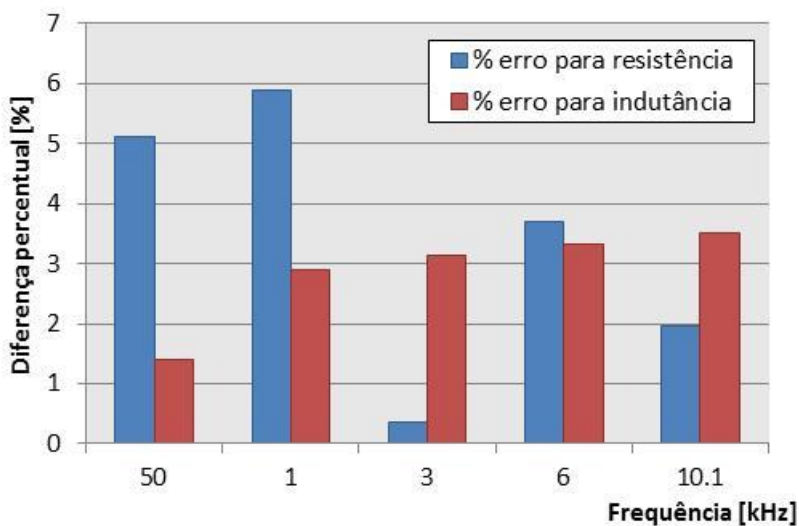


Figura 28- Resultados para o IPU de Snøhvít.



## 5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como foco principal a modelagem e o estudo de cabos umbilicais e a extração de seus parâmetros elétricos (resistência e indutância), envolvendo análises com métodos analíticos e numéricos. Esse tipo de cabo é tipicamente usado em sistemas de transmissão submarinos e também naqueles em que os cabos são conjugados com cabos de potência, controle, comunicação, e até mangueiras hidráulicas.

Devido à complexidade desse tipo de cabo, a modelagem pode ser desafiadora, considerando-se a simetria dos condutores e a disposição antissimétrica de outros objetos. O primeiro passo foi validar o método numérico frente a metodologias analíticas e com resultados de medições.

A aplicação de metodologias analíticas para o cálculo das matrizes de impedância série e transversal de cabos umbilicais é vantajosa quando a geometria da secção do cabo é simples. Para casos mais complexos, onde existem diversos objetos condutores e isolantes, torna-se impraticável aplicar as formulações apresentadas na revisão bibliográfica. O método dos elementos finitos por sua vez, por ser genérico, permite calcular tais matrizes independentemente da complexidade da secção do cabo.

Foram apresentados resultados numéricos para duas topologias de cabos. O primeiro exemplo, no qual foi modelado um cabo coaxial simples, validou os resultados para uma vasta gama de valores de frequência, tanto para os valores de resistência quanto para os de indutância. Os erros observados no cálculo da resistência sugerem que o aumento da frequência causa erros maiores. A investigação sugere que tais erros se referem ao efeito pelicular presente de maneira preponderante acima de 20 kHz, que para o caso de condutores de cobre, apresenta uma profundidade pelicular de apenas 0,15 mm. Já a indutância apresentou diferença maior em baixas frequências, porém, em todas as frequências analisadas a diferença foi sempre menor que 8%, mostrando robustez e precisão dos cálculos analíticos e numéricos. É importante salientar que o comportamento observado na curva de indutância *versus* frequência pode ser explicado pelo fenômeno do efeito pelicular. Em baixas frequências, a distribuição de corrente na secção do condutor é praticamente uniforme, fazendo com que a indutância total seja composta pelo somatório de indutância interna e externa. Com o aumento da frequência, o efeito pelicular torna-se expressivo, e a parcela de indutância interna tende a zero. Considerando-

se que o cálculo através do MEF considera o efeito pelicular e também a indutância interna dos condutores, fica evidente que a formulação analítica usada não contempla tal fenômeno e, portanto resultados diferentes são obtidos.

Com relação ao segundo caso estudado, o cabo umbilical híbrido de Snøhvit, com comprimento de 144 km, foi modelado em duas partes. Primeiramente foi modelado somente o trifólio de potência, considerando-se os condutores de cada uma das fases e suas respectivas blindagens semicondutoras e isolantes elétricos. Nessa etapa, ótimos resultados foram atingidos ao comparar os resultados da simulação baseada no método de elementos finitos com os valores medidos expostos na literatura. Praticamente todos os valores de resistência e indutância apresentaram diferença inferior a 5%.

A segunda etapa de estudo do umbilical de Snøhvit englobou também os outros componentes existentes no cabo, como as mangueiras de gás, blindagens e fibras óticas. Ao incluir essas outras partes ferromagnéticas, pôde-se comprovar que os parâmetros do cabo são alterados consideravelmente, em especial os valores de indutância. Dessa maneira, foi possível constatar concentração de campo magnético nos arredores dos condutores de potência, alterando-se assim a distribuição da energia magnética. A comparação com valores medidos foi realizada novamente, e os resultados foram outra vez bem sucedidos, ficando todos abaixo de 6% de diferença.

A aplicação de softwares baseados no método de elementos finitos demonstrou habilidade e precisão em calcular as matrizes de impedância série de cabos umbilicais. Além da rapidez e agilidade que os softwares comerciais proporcionam, comprovou-se a qualidade de seus resultados. Este trabalho trouxe contribuição não somente para a modelagem de cabos umbilicais, mas também para análise e modelagem de outros tipos de cabos, dado que a metodologia numérica aqui empregada estende-se a qualquer tipo de cabo.

Em se tratando da continuação deste trabalho, cita-se a possibilidade de agregar algoritmos de otimização para estudar variações geométricas e de material que possibilitem aumentar a eficiência do umbilical frente as necessidades de projeto. Dado a rapidez do cálculo analítico este pode ser mais vantajoso quando comparado com as análises através do MEF.

Outra possível área de estudos futuros é o efeito da temperatura nos cabos umbilicais. Considerando-se que no leito marinho a temperatura da água do mar é geralmente muito baixa e também que a passagem de corrente pelos condutores gera calor por efeito Joule, existe



um gradiente de temperatura ao qual as diversas partes do cabo estão expostas. Além do efeito da temperatura, é possível considerar também o estudo acerca da disposição geométrica para cabos umbilicais híbridos com mais de dois grupos trifásicos, nos quais ocorre acoplamento magnético intenso entre sistemas de transmissão considerados independentes.



## REFERÊNCIAS

- Ametani, A. (1980). A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables. *IEEE Transactions, PAS-99*, 902-910.
- ANSYS Inc. (13 de March de 2012). Maxwell 3D User's Guide. Pittsburgh, PA, USA.
- Bastos, J. P. (2003). *Electromagnetic Modeling by Finite Element Method*. Florianópolis: CRC Press.
- Bastos, J. P. (2004). *Eletromagnetismo para Engenharia: Estática e Quase-Estática*. Florianópolis: Editora da UFSC.
- Bonneville Power Administration. (1986). *EMTP, Electromagnetic Transients Program Reference Manual - Theory Book*. Portland, Oregon.
- Brown, G. W., & Rocamora, R. G. (1976). Surge Propagation in Three-Phase Pipe-Type Cables. Part I - Unsaturated Pipe. *IEEE Transactions, vol. PAS-95*, 89-95.
- Carson, J. R. (1926). Wave Propagation in Overhead Wires, with Ground Return. *Bell System Technological Journal, vol. 5*, 539-534.
- Chari, M. V. (1974). Finite Element Solution of the Eddy-Current Problem in Magnetic Structures. *IEEE Transactions, vol. PAS-93*, 62-72.
- Chari, M. V., & Csendes, Z. J. (1977). Finite Element Analysis of the Skin Effect in Current Carrying Conductors. *IEEE Transactions on Magnetism, vol. MAG-13*, 1125-1127.

- Clough, R. (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *ASCE Conference on Electronic Computation* .
- Comellini, E., Inverzini, A., & Manzoni, G. (1973). A Computer Program for Determining Electrical Resistance and Reactance of any Transmission Line. *IEEE Transactions*, vol. PAS-92, 308-314.
- Deeley, E. M., & Okon, E. E. (1978). An Integral Method for Computing the Inductance and A.C. Resistance of Parallel Conductors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, 625-634.
- Gustavsen, B., Bruaset, A., Bremnes, J. J., & Hassel, A. (Outubro de 2009). A Finite-Element Approach for Calculating Electrical Parameters of Umbilical Cables. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, pp. 2375-2384.
- Huebner, K., Dewhirst, D., Smith, D., & Byrom, T. (1976). *The Finite Element Method for Engineers*. Wiley.
- International Energy Agency. (s.d.). Acesso em 3 de Janeiro de 2013, disponível em IEA - International Energy Agency: <http://www.iea.org/publications/freepublications/publications/kwes.pdf>
- Johnson, F. V. (1938). *Patente Nº 2106803*. Estados Unidos da América.
- Jow, J., & Mendelsohn, A. (2003). Novel Polymeric Insulating Compounds for HVDC Applications. *International Conference on Insulated Power Cables*.

- Konrad, A. (Jan. de 1982). Integrodifferential Finite Element Formulation of Two Dimensional Steady-State Skin Effect Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, pp. 284-292.
- Konrad, A., & Silvester, P. (1973). Triangular Finite Element for the Generalized Bessel Equation of Order  $m$ . *International Journal of Numerical Methodologies in Engineering*, pp. 43-55.
- Lucas, R., & Talukdar, S. (1978). Advances in Finite Element Techniques for Calculating Cable Resistance and Inductance. *IEEE Transactions*, vol. PAS-97, 875-883.
- Mamede, J. (2011). *Manual de Equipamentos Elétricos*. LTC.
- Paul, C. R. (2006). *Introduction to Electromagnetic Compatibility*. Wiley-Interscience.
- Pollaczek. (1926). Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung. *E.N.T., Band 3 (Heft 9)*, 339-360.
- Rocha, P. E. (2007, Março). Modelagem de Cabos Subterrâneos e Submarinos para Estudos de Transitórios.
- Schelkunoff, S. A. (1934). The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Line and Cylindrical Shells. *Bell System Technical Journal*, vol. 13, 522-579.
- Segerlind, L. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. Wiley.
- Statoil Inc. (07 de Outubro de 2005). *Snøhvit lines in place*. Acesso em 12 de Dezembro de 2012, disponível em Statoil.com: <http://www.statoil.com/en/NewsAndMedia/News/2005/Pages/SnC3%B8hvitLinesInPlace.aspx>

- Tannehill, J., Anderson, D., & Pletcher, R. (1997). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis.
- Technip. (2012). Umbilical Systems. *Customized umbilical systems for the global offshore oil and gas market*.
- Tegopoulos, J. A., & Kriezis, E. E. (1971). Eddy Current Distribution in Cylindrical Shells of Infinite Length due to Axial Currents - Part II: Shells of Finite Thickness. *IEEE Transactions*, vol. PAS-90, 1287-1294.
- Wedepohl, L. M. (September de 1969). Multiconductor Transmission Lines - Theory of Natural Modes and Fourier Integral Applied to Transient Analysis. *IEE Proceedings*, vol. 116, pp. 1553-1563.
- Wedepohl, L. M., & Wilcox, D. J. (Fevereiro de 1973). Transient Analysis of Underground Power Transmission Systems, System Model and Wave-Propagation Characteristics. *Proceedings IEE*, vol. 120, pp. 253-260.
- Yin, Y. (September de 1990). M. Sc., Tsinghua university. *Calculation of Frequency Dependent Parameters of Underground Cables With Finite Element Method*.

## ANEXO A – Código em Matlab para cálculo de cabos SC.

A rotina de cálculo abaixo detalhada foi utilizada para o cálculo de parâmetros elétricos série para cabos do tipo coaxial, e executada através do software Matlab R2011b.

```
% Rotinas de cálculo para levantamento da matriz de
% impedância série de
% cabos coaxiais.

a = 5e-3;
b = 10e-3;
c = 12e-3;
u0 = 4*pi*1e-7;
ur1 = 1;
ur2 = 10;
cond1 = 58e6;
cond2 = 10e6;

freq = [10 20 35 100 200 450 1000 2000 5000 10000 20000
50000 100000];

%Abertura de arquivos
fid1 = fopen('analiticoR_Gus.csv', 'w');
fid2 = fopen('analiticoL_Gus.csv', 'w');
fid3 = fopen('analiticoZlimag_Gus.csv', 'w');
fprintf(fid1, "Freq [kHz]","R_Analitico [Ohm]\n");
fprintf(fid2, "Freq [kHz]","L_Analitico [H]\n");
fprintf(fid3, "Freq [kHz]","Zl_imag_Analitico
[Ohm]\n");

m = length(freq);
for k=1:m
    w(k) = 2*pi*freq(k);
    m1(k) = sqrt(j*w(k)*u0*ur1*cond1);
    m2(k) = sqrt(j*w(k)*u0*ur2*cond2);
    Zout1(k) =
m1(k)*besseli(0,m1(k)*a)/(2*pi*a*cond1*besseli(1,m1(k)*a
));
    Zext(k) = j*w(k)*u0*log(b/a)/(2*pi);
    Zin2(k) =
(m2(k)/(2*pi*c*cond2))*((besseli(0,m2(k)*c)*besselk(1,m2
(k)*b)+besselk(0,m2(k)*c)*besseli(1,m2(k)*b))/(besseli(1
,m2(k)*c)*besselk(1,m2(k)*b)-
besseli(1,m2(k)*b)*besselk(1,m2(k)*c));
    Zloop(k) = Zout1(k) + Zext(k) + Zin2(k);
    R(k) = real(Zloop(k))*1000;
```

```

    L(k) = imag(Zloop(k))*1000/w(k);
    %Escritura nos arquivos de tabela
    fprintf(fid1, '%.6f,%.3f\n', freq(k)/1000, R(k));
    fprintf(fid2, '%.6f,%.6f\n', freq(k)/1000, L(k));
    fprintf(fid3, '%.6f,%.3f\n', freq(k)/1000,
imag(Zloop(k)));
end

% fecha arquivos
fclose(fid1);
fclose(fid2);
fclose(fid3);

```